



Suivi numérique de bifurcations

Journées annuelles du Groupement de Recherche EX-MODELI 16 - 17 octobre 2025, Lille

Sébastien BAGUET
sebastien.baguet@insa-lyon.fr

LaMCoS
CNRS / INSA-LYON
Villeurbanne, France

- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

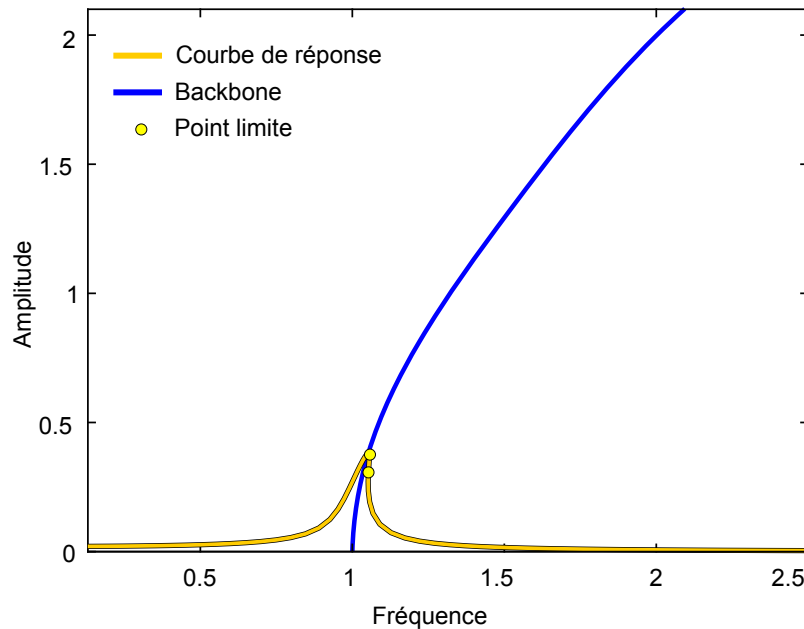
Phénomènes non linéaires indésirables

Fréquence de résonance dépendante de l'amplitude



Pour une amplitude d'excitation suffisamment grande, coexistence de plusieurs solutions stables/instables pour une même fréquence d'excitation. Phénomène d'**hystérésis**.

Possibilité de saut d'une solution stable vers une autre



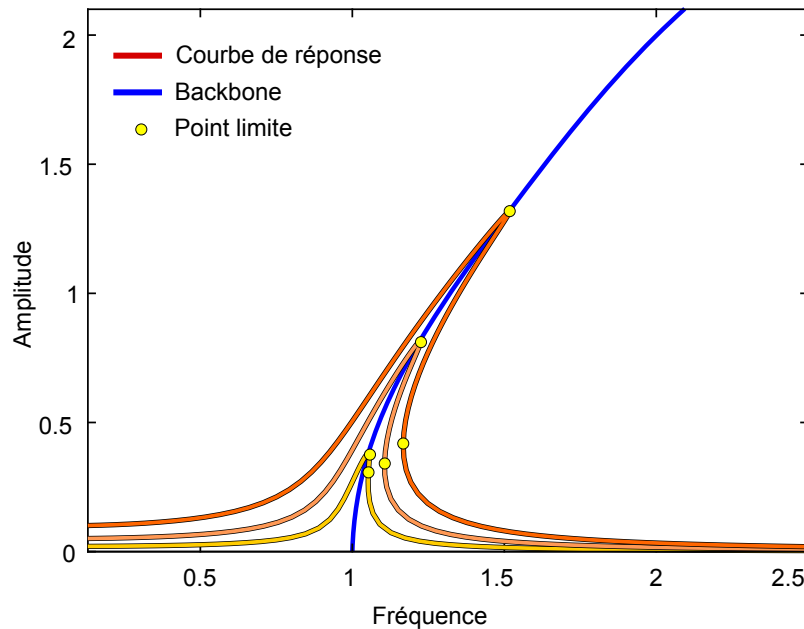
Phénomènes non linéaires indésirables

Fréquence de résonance dépendante de l'amplitude



Pour une amplitude d'excitation suffisamment grande, coexistence de plusieurs solutions stables/instables pour une même fréquence d'excitation. Phénomène d'**hystérésis**.

Possibilité de saut d'une solution stable vers une autre



Phénomènes non linéaires indésirables

Fréquence de résonance dépendante de l'amplitude



Pour une amplitude d'excitation suffisamment grande, coexistence de plusieurs solutions stables/instables pour une même fréquence d'excitation. Phénomène d'**hystérésis**.

Possibilité de saut d'une solution stable vers une autre

Solutions isolées (branches de solutions détachées de la branche principale)

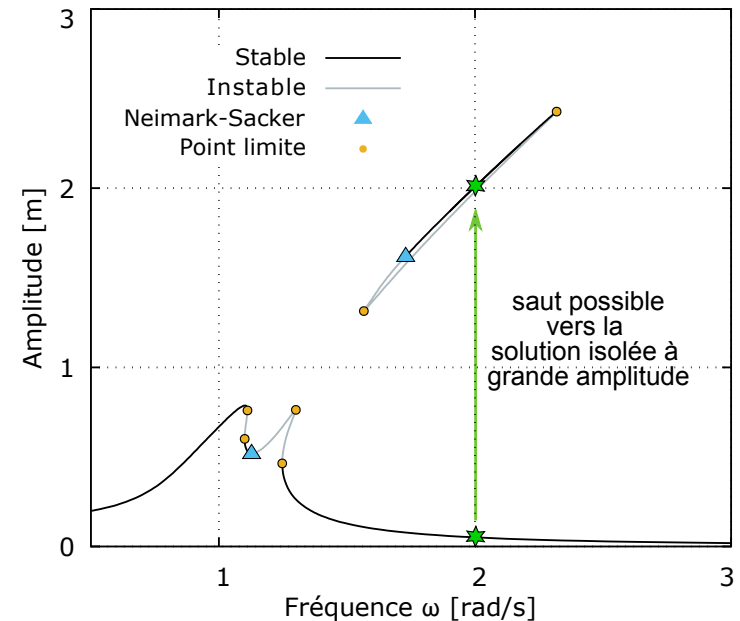
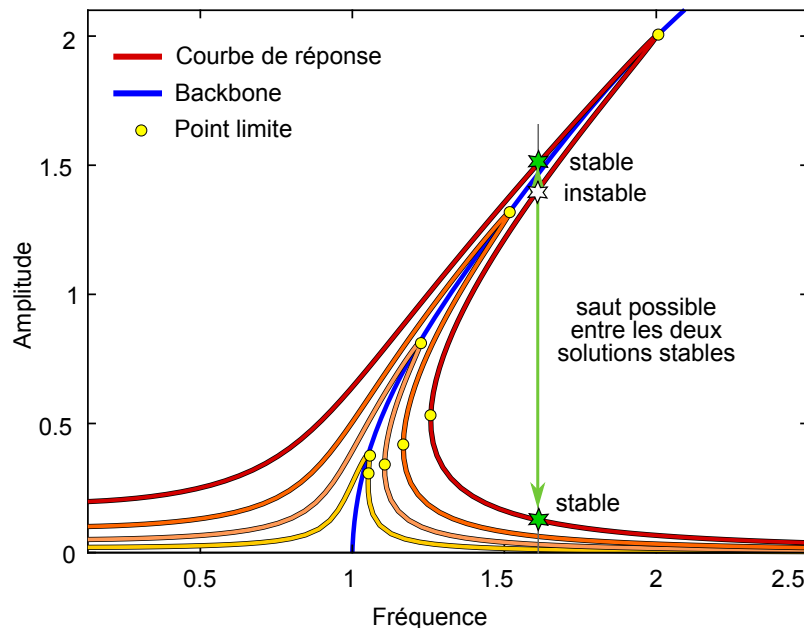


Possibilité de saut vers les solutions isolées, sous l'effet d'une perturbation.

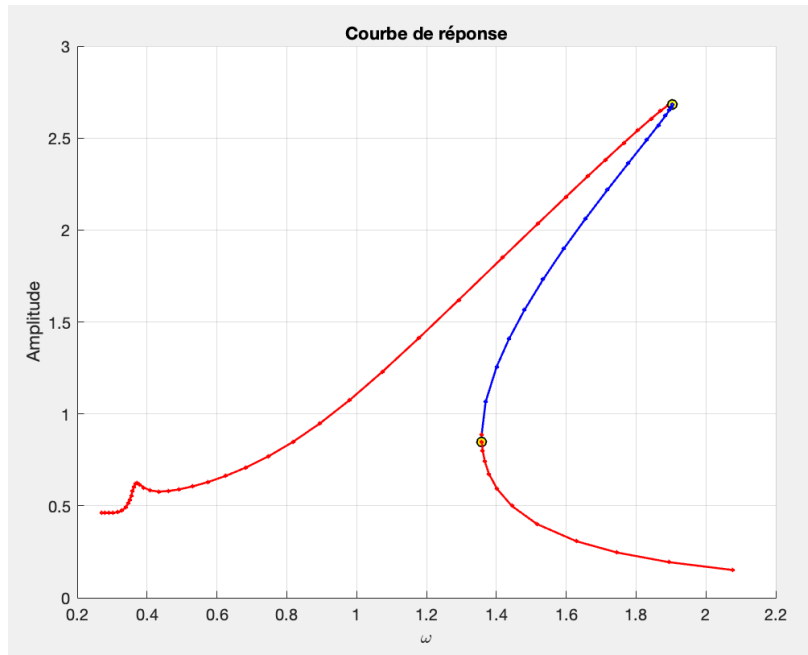
Bifurcations



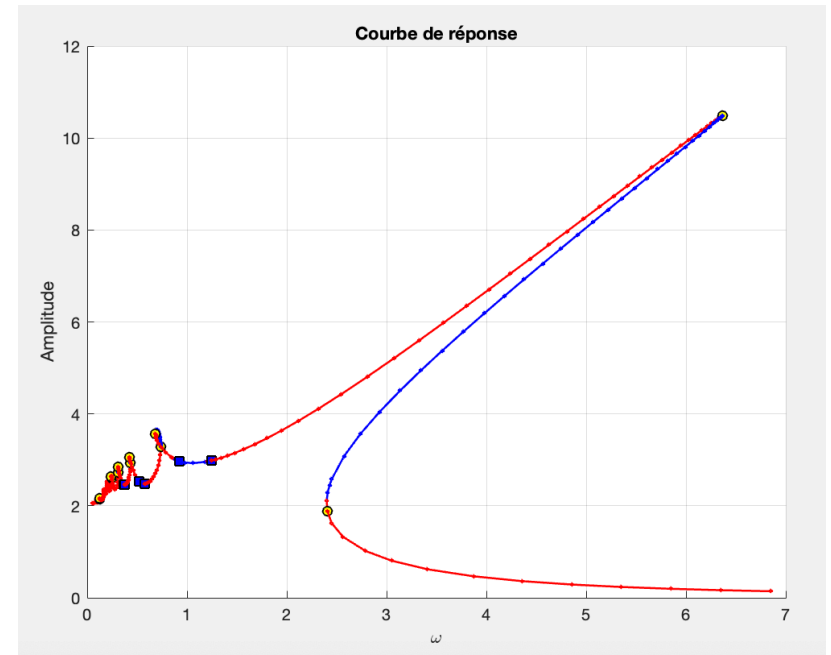
Changements qualitatifs de régime dynamique : changement de stabilité, brisure de symétrie, apparition de nouvelles branches de solutions, doublement de période, transition vers un régime quasi-périodique, ...



Phénomènes non linéaires indésirables



$F = 0.5$

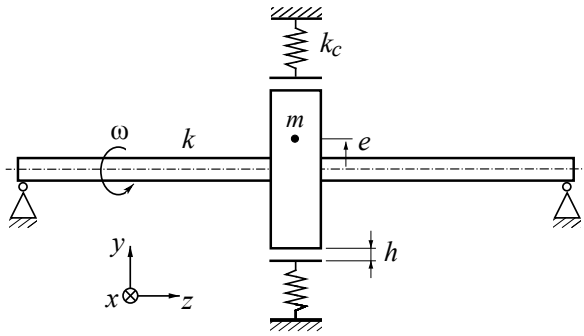


$F = 6.5$

- Phénomènes non linéaires indésirables
- **De l'utilité d'étudier les bifurcations**
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

De l'utilité d'étudier les bifurcations

Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator

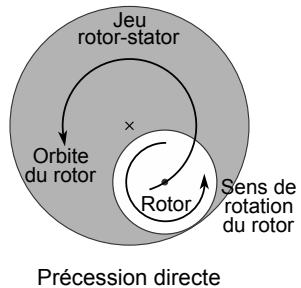
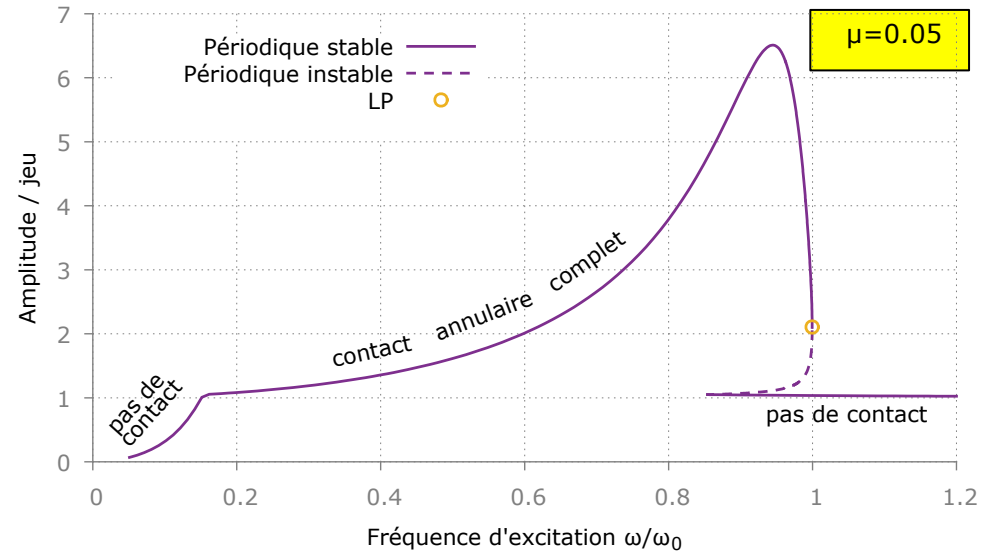


rotor : $m=1\text{kg}$ $k=100\text{N/m}$ $R_{disc}=20h$

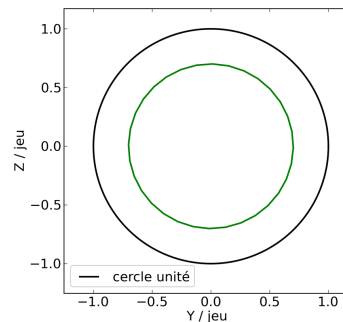
contact : $k_c=2500\text{N/m}$ $h=0.105\text{m}$

μ = coeff. frottement

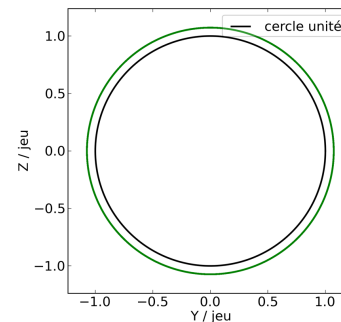
balourd : $e=0.1\text{m}$



Pas de contact

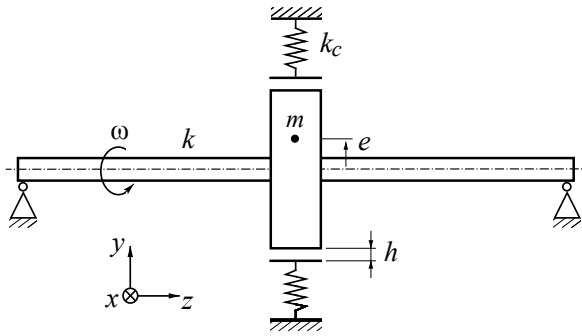


Contact annulaire complet



De l'utilité d'étudier les bifurcations

Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator

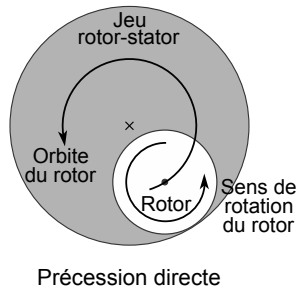
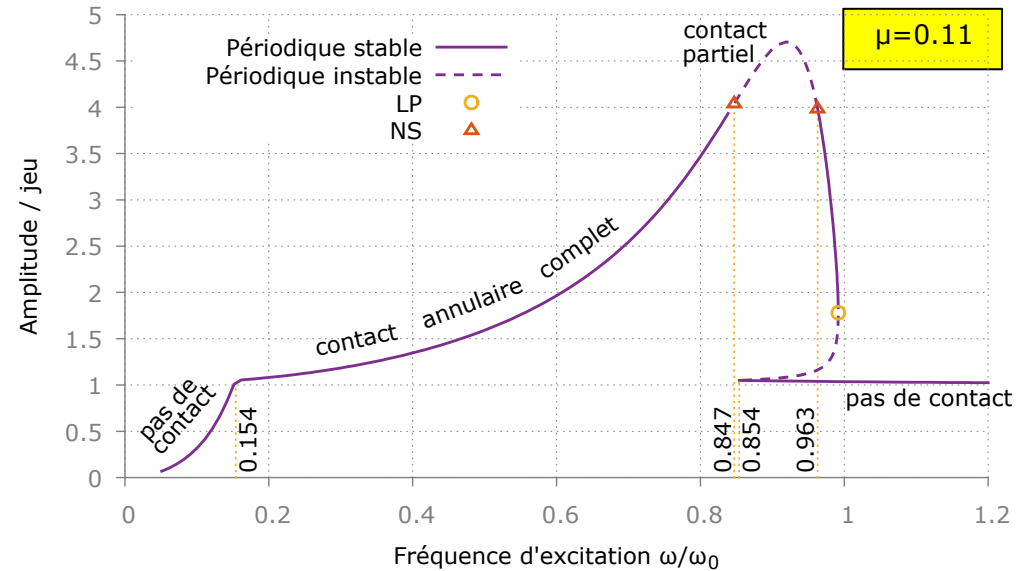


rotor : $m=1\text{kg}$ $k=100\text{N/m}$ $R_{disc}=20h$

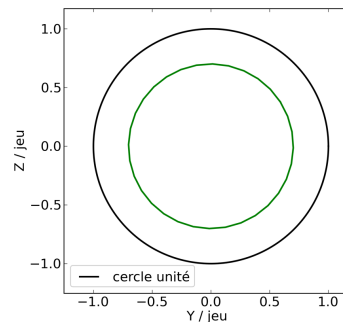
contact : $k_c=2500\text{N/m}$ $h=0.105\text{m}$

μ = coeff. frottement

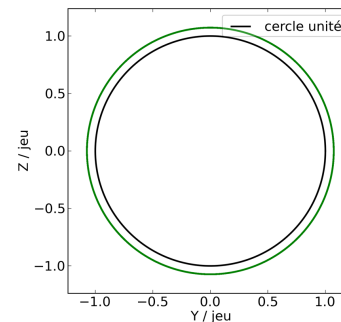
balourd : $e=0.1\text{m}$



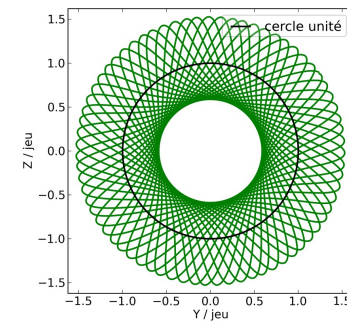
Pas de contact



Contact annulaire complet

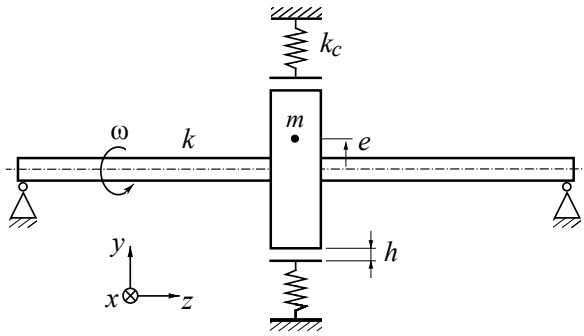


Contact partiel (rebonds)



De l'utilité d'étudier les bifurcations

Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator

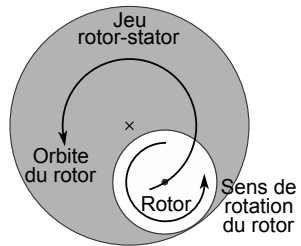


rotor : $m=1\text{kg}$ $k=100\text{N/m}$ $R_{disc}=20h$

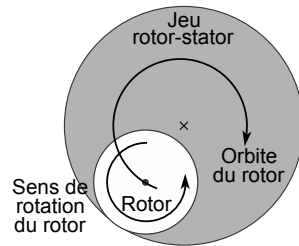
contact : $k_c=2500\text{N/m}$ $h=0.105\text{m}$

μ = coeff. frottement

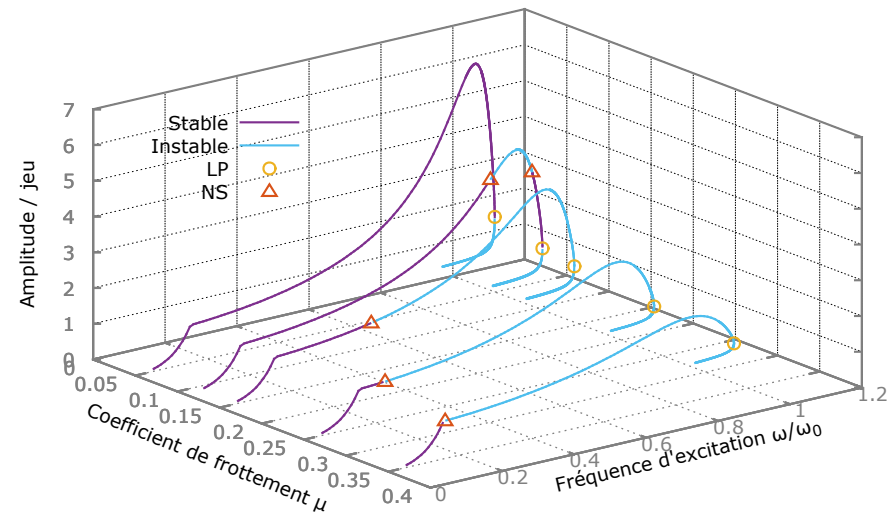
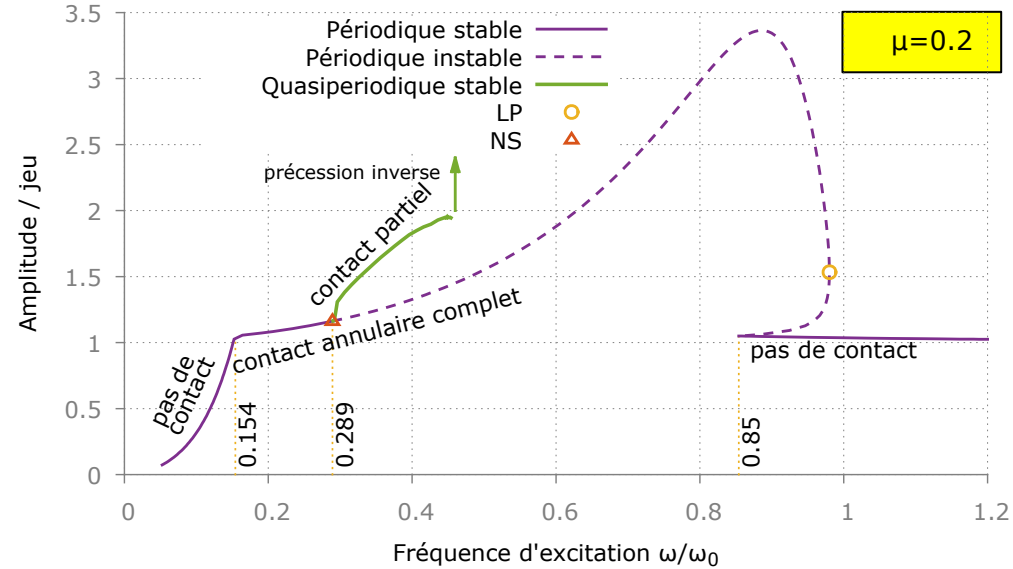
balourd : $e=0.1\text{m}$



Précession directe

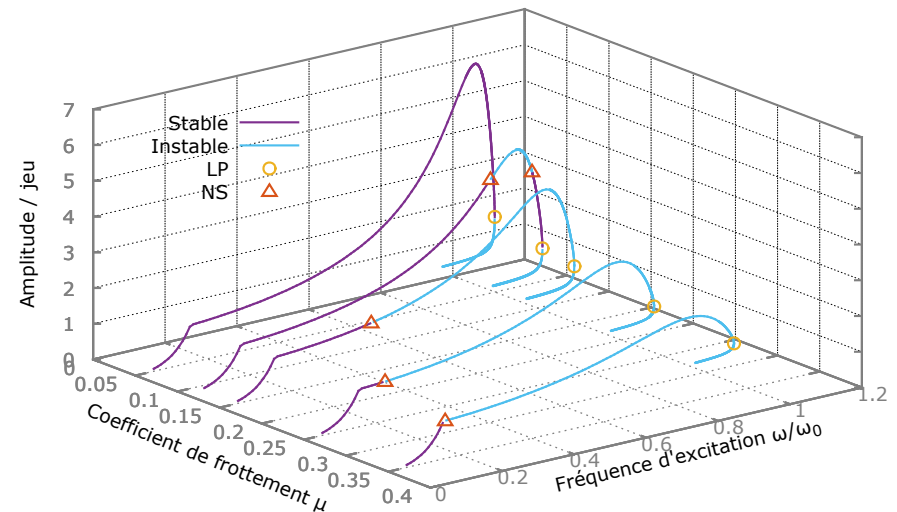
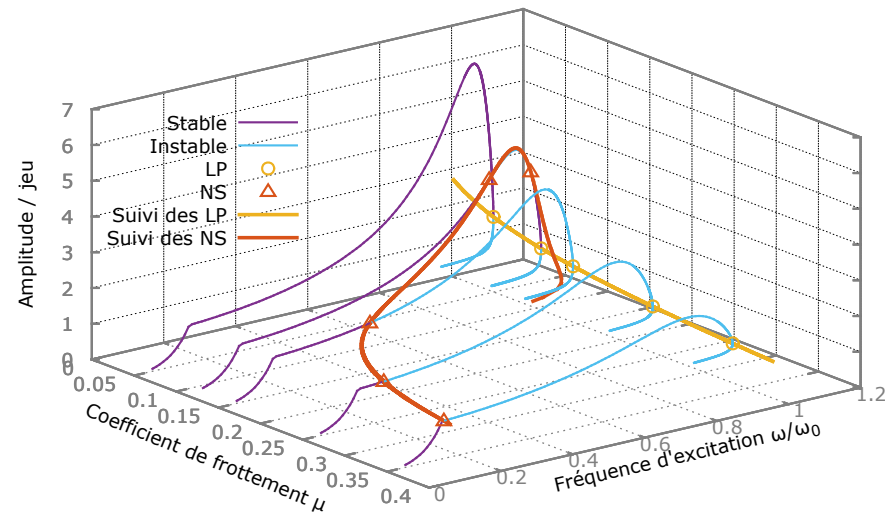
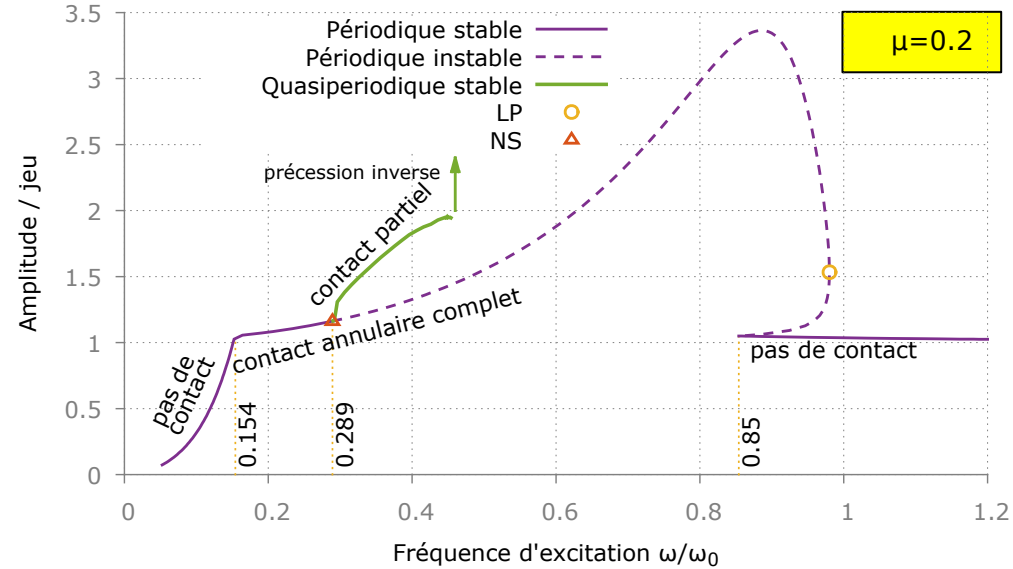
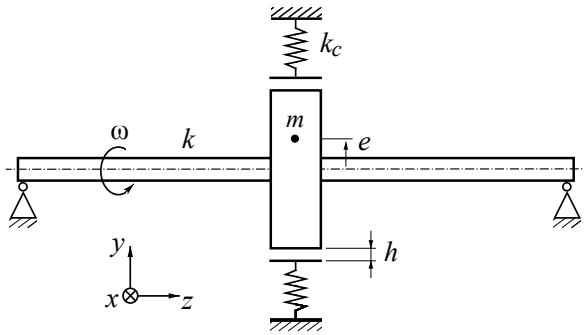


Précession inverse



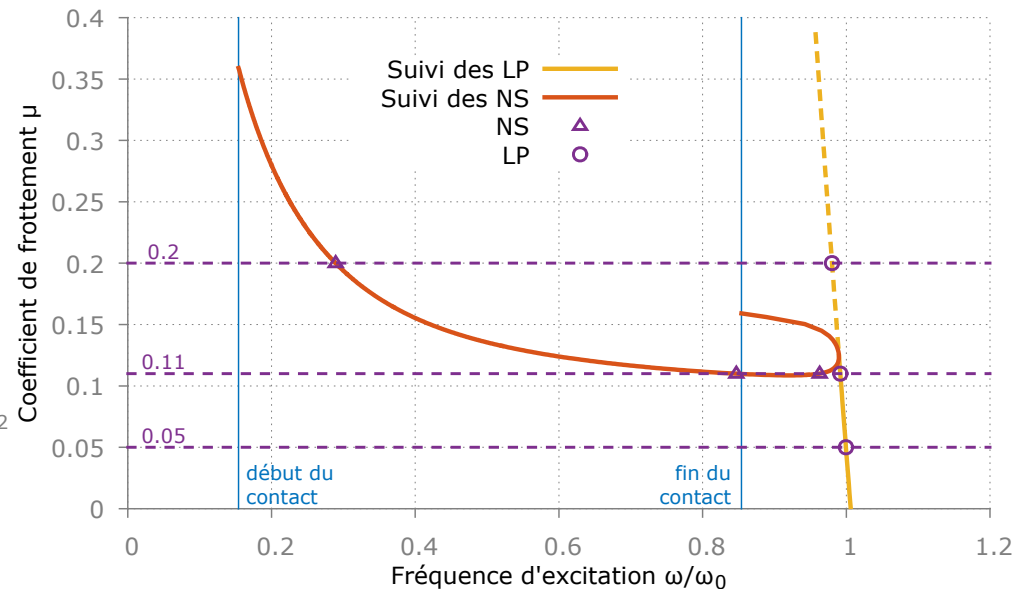
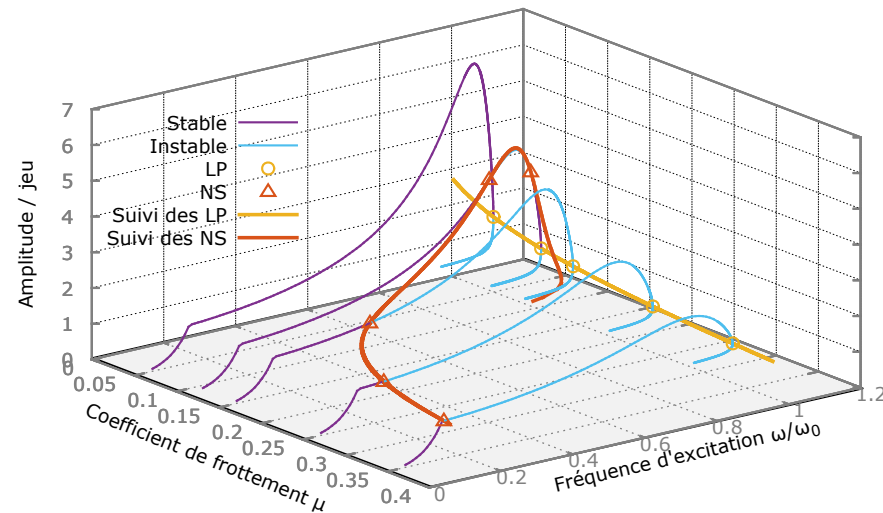
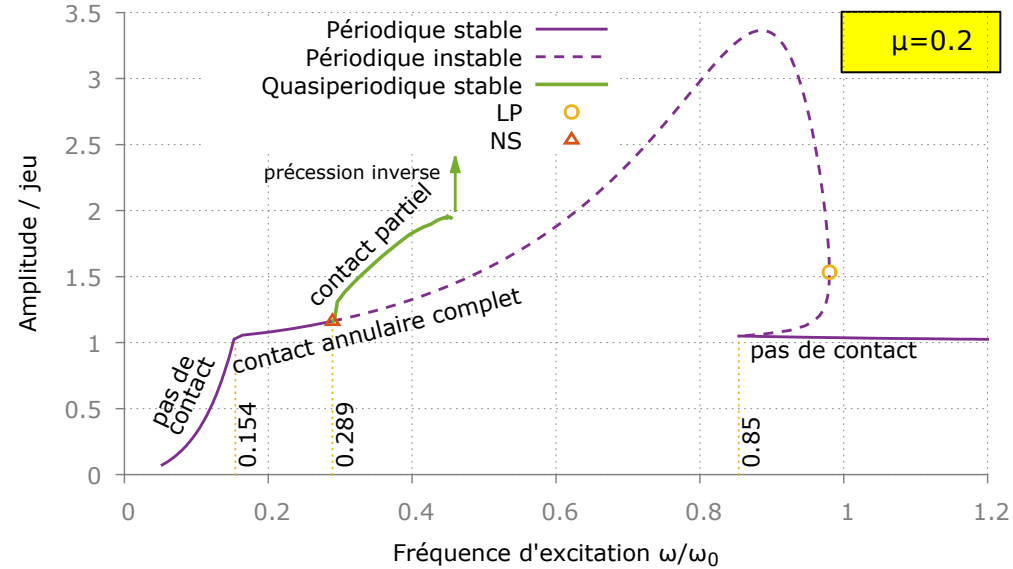
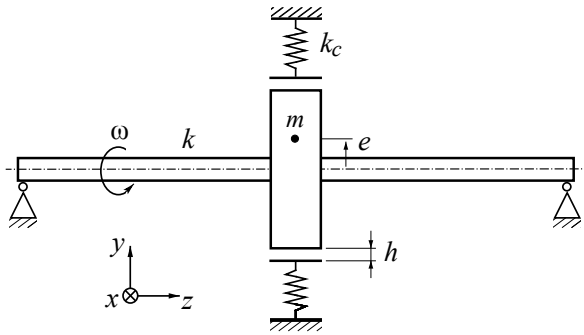
De l'utilité d'étudier les bifurcations

Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator



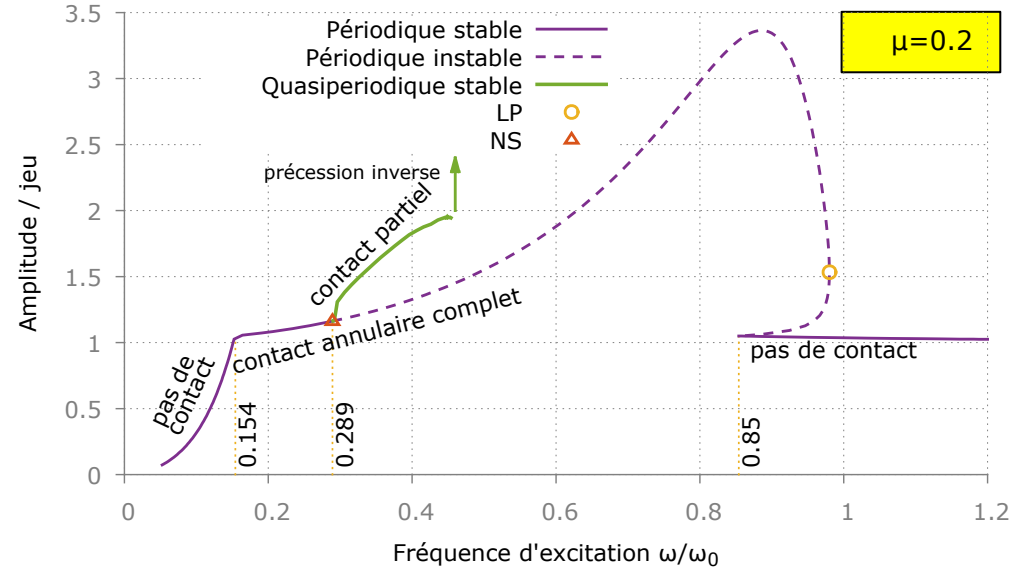
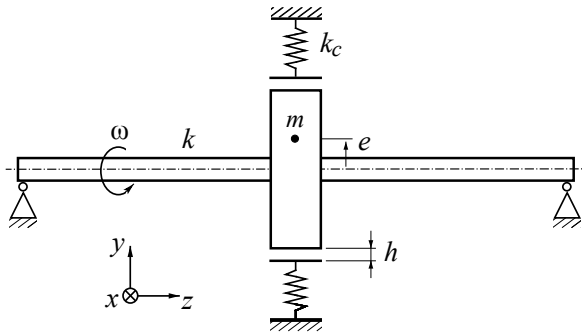
De l'utilité d'étudier les bifurcations

Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator



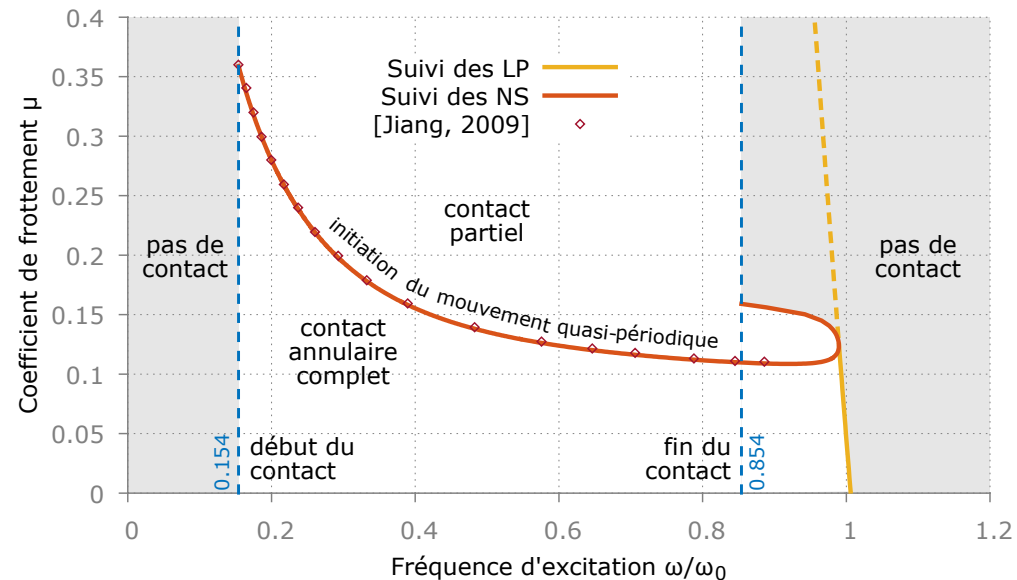
De l'utilité d'étudier les bifurcations

Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator



En un seul calcul :

- cartographie des **zones de stabilité**
- cartographie des **changements de régime dynamique** du système
- optimisation lors de la phase de conception



- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

Outils numériques pour l'analyse de bifurcations

➔ Calcul des courbes de réponse non linéaires

Méthode de l'équilibrage harmonique (HBM)
+ continuation par longueur d'arc

➔ Calcul de stabilité

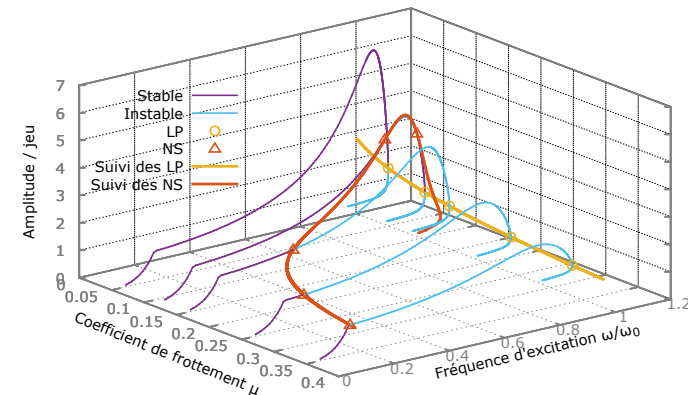
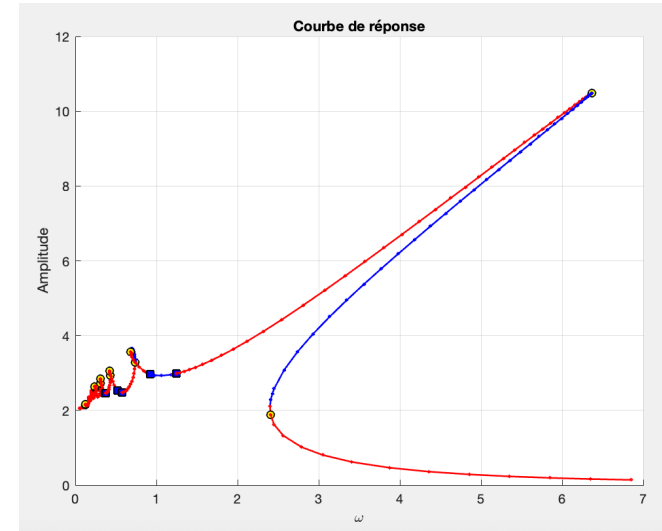
Matrice de Hill, exposants de Floquet

➔ Localisation des bifurcation

Indicateurs de bifurcations, systèmes augmentés

➔ Suivi numérique de bifurcations

Systèmes augmentés + continuation



- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

Equilibre dynamique non linéaire

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega, t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}(\omega, t) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}(t)$: vecteur déplacement de taille n ddl

$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$: vecteur des efforts non linéaires de taille n ddl

$\mathbf{p}(\omega, t)$: vecteur des efforts extérieurs de taille n ddl

Système **différentiel** non linéaire
de taille n ddl

Méthode de l'équilibrage harmonique (HBM)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{X}_c^k \cos(k\omega t) + \mathbf{X}_s^k \sin(k\omega t) \quad \text{développement en série de Fourier à } H \text{ harmoniques}$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{0T}, \mathbf{X}_c^{1T}, \mathbf{X}_s^{1T}, \dots, \mathbf{X}_c^{HT}, \mathbf{X}_s^{HT}]^T \quad \text{vecteur des coeff. de Fourier de taille } L = n \times (2H + 1)$$

Equilibre dynamique dans le domaine fréquentiel

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}_L$$

Système **algébrique** non linéaire
de taille $L = n \times (2H + 1)$

$$\mathbf{Z}(\omega) = \omega^2 \nabla^2 \otimes \mathbf{M} + \omega \nabla \otimes \mathbf{C} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{K}$$

Solution périodique = point d'équilibre

Calcul des efforts non linéaires

$$\mathbf{X} \xrightarrow{FFT^{-1}} \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \xrightarrow{FFT} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \xrightarrow{FFT} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X})$$

fréquentiel temporel fréquentiel



G. Von Groll and D. J. Ewins. *The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems.* J. Sound Vib., 241(2), 223–233, 2001. doi: [10.1006/jsvi.2000.3298](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3298).

Continuation des solutions périodiques

Equilibre dynamique dans le domaine fréquentiel

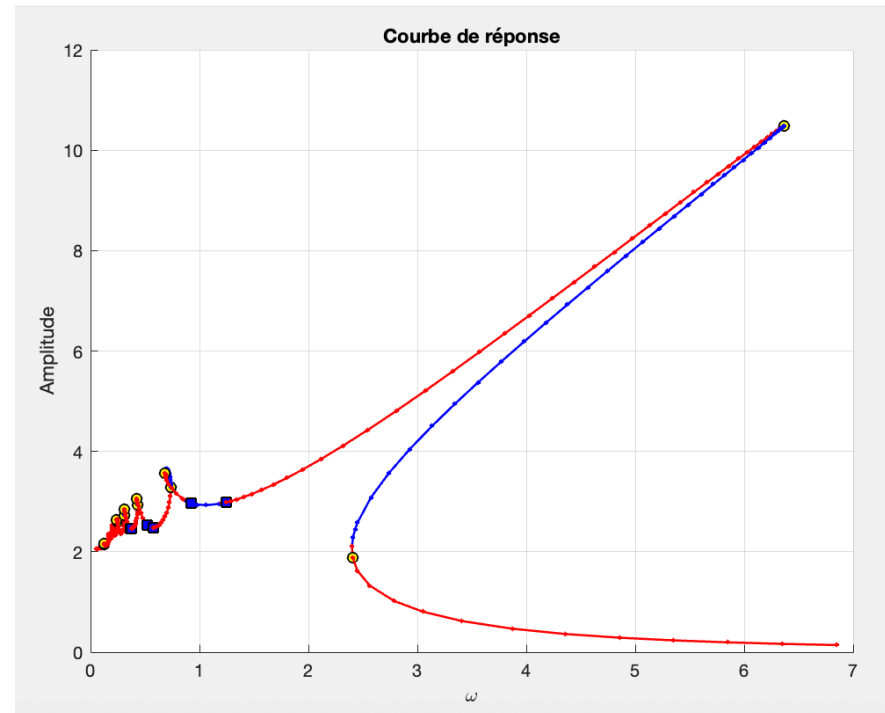
$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}_L$$

taille $L = n \times (2H + 1)$

Courbe de réponse en fréquence

- Continuation par pseudo-longueur d'arc avec ω variable
- Longueur de pas adaptative

Continuation par pseudo-longueur d'arc



Continuation des solutions périodiques

Equilibre dynamique dans le domaine fréquentiel

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}_L$$

taille $L = n \times (2H + 1)$

Courbe de réponse en fréquence

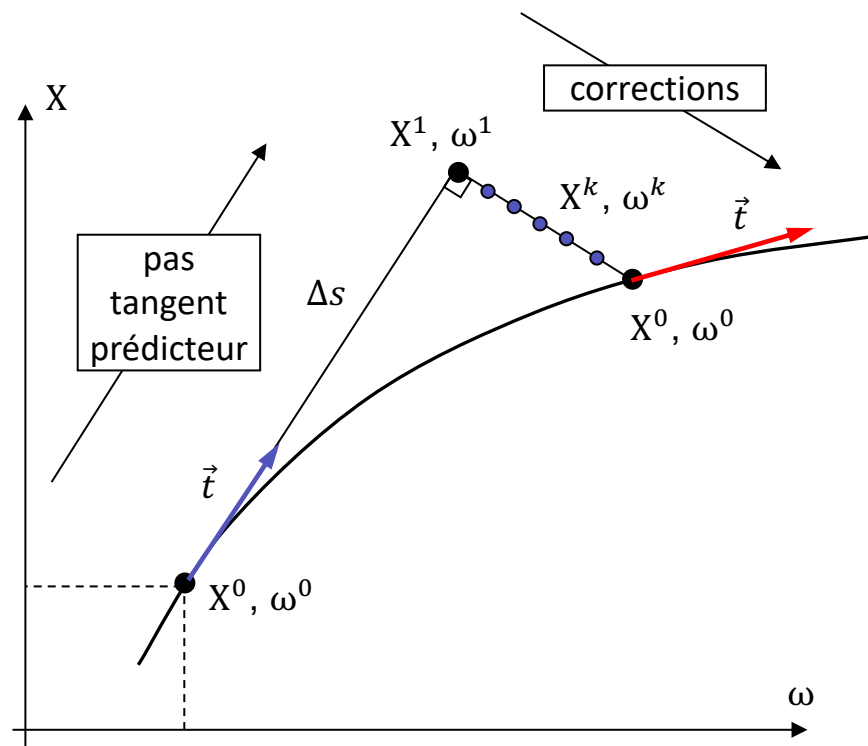
- Continuation par pseudo-longueur d'arc avec ω variable
- Longueur de pas adaptative

Continuation par pseudo-longueur d'arc

- on part d'une **solution connue** X^0, ω^0
- On résout simultanément l'équilibre dynamique + équation de longueur d'arc

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) \\ \text{longueur d'arc} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{L+1} \quad \text{taille } L+1$$

- **pas prédicteur** de longueur fixée Δs selon la direction tangente $\vec{t}$
- **corrections** selon la direction orthogonale à $\vec{t}$ (itérations Newton-Raphson)



- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - **Stabilité des solutions périodiques**
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

Stabilité des solutions périodiques

Equilibre dynamique

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega, t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}(\omega, t) = \mathbf{0}$$

taille n

domaine temporel

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

taille $L = n \times (2H + 1)$

domaine fréquentiel

Théorie de Floquet

Une solution périodique est **stable** si de petites perturbations ne modifient pas significativement sa périodicité, i.e. si elle reste proche de sa forme initiale malgré les perturbations.

Solution périodique $\mathbf{z}_0$ + perturbation $\delta \mathbf{z}_0$

On regarde l'évolution de la perturbation au cours du temps

Domaine temporel

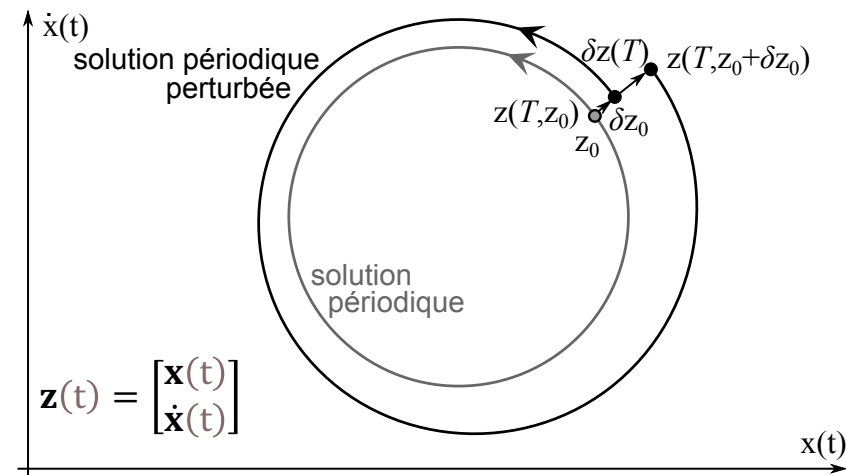
Monodromie = mesure de la variation d'une solution périodique sur une période T .

Représentée par une matrice de monodromie $\mathbb{M}$

$$\delta \mathbf{z}(T) = \mathbb{M} \delta \mathbf{z}_0 \quad \text{taille } 2n$$

valeurs propres de $\mathbb{M}$ = **multiplicateurs de Floquet** μ_j
 n paires de v.p. complexes conjuguées

$$\text{Solution } \mathbf{stable} \text{ ssi } |\mu_j| < 1 \quad \forall j = 1 \dots 2n$$



Evolution dans l'espace des phases d'une solution périodique perturbée

Stabilité des solutions périodiques

Equilibre dynamique

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega, t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}(\omega, t) = \mathbf{0}$$

taille n

domaine temporel

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

taille $L = n \times (2H + 1)$

domaine fréquentiel

Théorie de Floquet

Une solution périodique est **stable** si de petites perturbations ne modifient pas significativement sa périodicité, i.e. si elle reste proche de sa forme initiale malgré les perturbations.

Solution périodique $\mathbf{z}_0$ + perturbation $\delta \mathbf{z}_0$

On regarde l'évolution de la perturbation au cours du temps

Domaine fréquentiel (HBM)

Méthode de Hill

Système aux valeurs propres quadratique

$$(\mathbf{R}_X + \Lambda \mathbf{\Delta}_1 + \Lambda^2 \mathbf{\Delta}_2) \mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad \text{taille } L$$

$\mathbf{R}_X$ matrice jacobienne

$$\mathbf{\Delta}_1 = 2\omega \nabla \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{C}$$

$$\mathbf{\Delta}_2 = \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{M}$$

Stabilité des solutions périodiques

Equilibre dynamique

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega, t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}(\omega, t) = \mathbf{0}$$

taille n

domaine temporel

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

taille $L = n \times (2H + 1)$

domaine fréquentiel

Théorie de Floquet

Une solution périodique est **stable** si de petites perturbations ne modifient pas significativement sa périodicité, i.e. si elle reste proche de sa forme initiale malgré les perturbations.

Solution périodique $\mathbf{z}_0$ + perturbation $\delta \mathbf{z}_0$

On regarde l'évolution de la perturbation au cours du temps

Domaine fréquentiel (HBM)

Méthode de Hill

Système aux valeurs propres quadratique

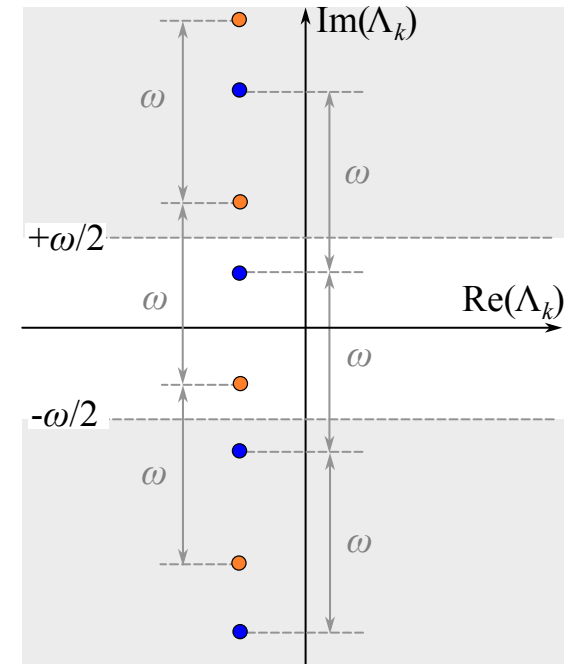
$$(\mathbf{R}_X + \Lambda \mathbf{\Delta}_1 + \Lambda^2 \mathbf{\Delta}_2) \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad \text{taille } L$$

$2L$ valeurs propres Λ_k tq $\Lambda_k = \lambda_j + i h \omega$ quand $H \rightarrow \infty$

On retient les $2n$ Λ_k avec la plus petite partie imaginaire

$\Rightarrow$ **exposants de Floquet** λ_j

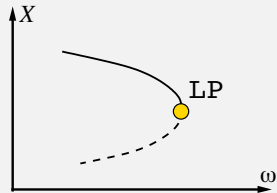
Solution **stable** ssi $\text{Re}(\lambda_j) < 0 \quad \forall j = 1 \dots 2n$



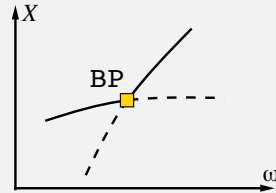
- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

Détection des bifurcations

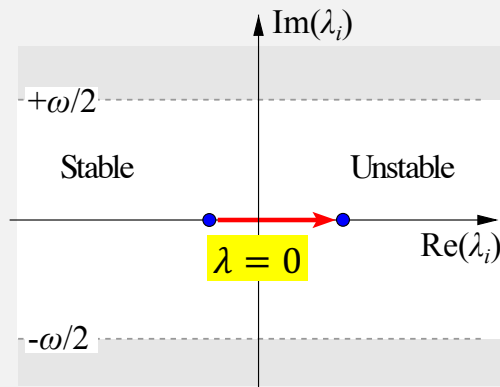
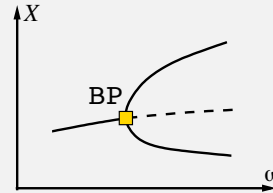
Scénarios de **perte de stabilité** avec les exposants de Floquet



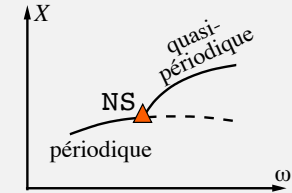
Point limite (LP)



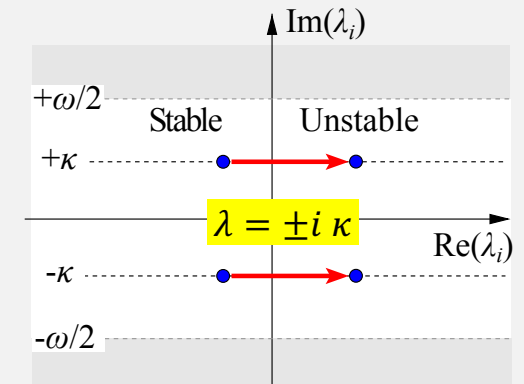
Point de branchement (BP)
transcritique / surcritique



Point limite (LP)
Point de branchement (BP)



Neimark-Sacker (NS)



Neimark-Sacker (NS)

$$0 < \kappa < \frac{\omega}{2}$$

Doublément de période (PD)

$$\kappa = \frac{\omega}{2}$$

Détection des bifurcations

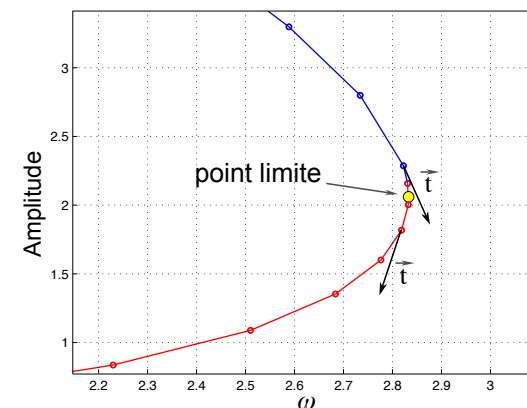
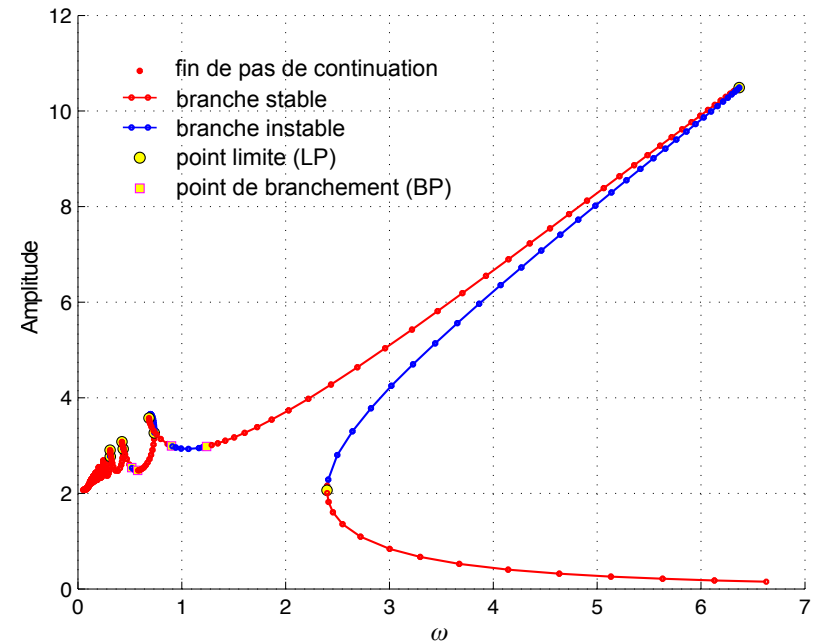
Dans la pratique, à chaque fin de pas de continuation :

- on comptabilise les N_{inst} **exposants de Floquets instables** tq $\text{Re}(\lambda_j) > 0$
- on compare avec le pas de continuation précédent

- Si $N_{inst}^i - N_{inst}^{i-1} = 0$: pas de bifurcation

- Si $N_{inst}^i - N_{inst}^{i-1} = 1$:
Point limite (**LP**) si changement de
direction du vecteur tangent
Point de branchement (**BP**) sinon

- Si $N_{inst}^i - N_{inst}^{i-1} = 2$:
Neimark-Sacker (**NS**) si $0 < \kappa < \frac{\omega}{2}$
Doublement de période (**PD**) si $\kappa = \frac{\omega}{2}$



Calcul des bifurcations par système augmenté

Equilibre dynamique $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}_L$ taille $L = n \times (2H + 1)$

Exposants de Floquet $(\mathbf{R}_X + \Lambda \Delta_1 + \Lambda^2 \Delta_2) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}_L$ taille L

Point limite (LP) et Point de branchement (BP)

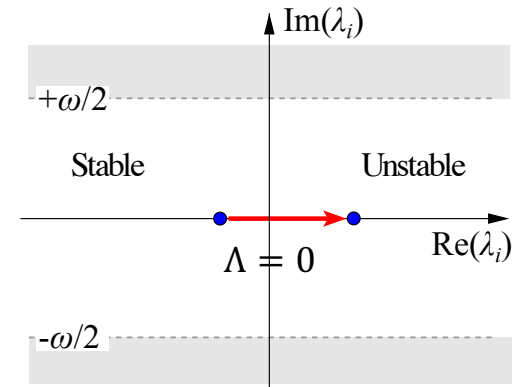
$\Lambda = 0$ valeur propre nulle

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) \\ \mathbf{R}_X \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{2L+1}$$

$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\phi}, \omega)$ taille $2L+1$

courbe de réponse
caractérisation des LP et BP
normalisation de $\boldsymbol{\phi}$

Restriction de la courbe de réponse
aux LP ou BP



Neimark-Sacker (NS) et Doublement de période (PD)

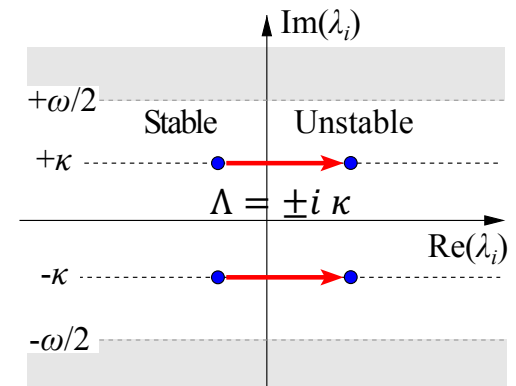
$\Lambda = \pm i \kappa$ valeur propre complexe conjuguée

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) \\ \mathbf{R}_X \boldsymbol{\phi}_1 - \kappa \Delta_1 \boldsymbol{\phi}_2 - \kappa^2 \Delta_2 \boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{R}_X \boldsymbol{\phi}_2 + \kappa \Delta_1 \boldsymbol{\phi}_1 - \kappa^2 \Delta_2 \boldsymbol{\phi}_2 \\ q^T \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_1^T \boldsymbol{\phi}_1 - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3L+2}$$

$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \kappa, \omega)$ taille $3L+2$

courbe de réponse
caractérisation des NS et PD

normalisation de $\boldsymbol{\phi}_1$ et $\boldsymbol{\phi}_2$



L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. *Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems*. MSSP, 88, 445–461, 2017. doi: [10.1016/j.ymssp.2016.09.037](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.09.037).

Suivi numérique des bifurcations

Equilibre dynamique $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) + \mathbf{P} = \mathbf{0}_L$ taille $L = n \times (2H + 1)$

Exposants de Floquet $(\mathbf{R}_X + \Lambda \Delta_1 + \Lambda^2 \Delta_2) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}_L$ taille L

Point limite (LP) et Point de branchement (BP)

$\Lambda = 0$ valeur propre nulle

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) \\ \mathbf{R}_X \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{2L+1}$$

$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\phi}, \omega)$ taille $2L+1$

courbe de réponse
caractérisation des LP et BP
normalisation de $\boldsymbol{\phi}$

Restriction de la courbe de réponse
aux LP ou BP

Neimark-Sacker (NS) et Doublement de période (PD)

$\Lambda = \pm i \kappa$ valeur propre complexe conjuguée

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) \\ \mathbf{R}_X \boldsymbol{\phi}_1 - \kappa \Delta_1 \boldsymbol{\phi}_2 - \kappa^2 \Delta_2 \boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{R}_X \boldsymbol{\phi}_2 + \kappa \Delta_1 \boldsymbol{\phi}_1 - \kappa^2 \Delta_2 \boldsymbol{\phi}_2 \\ q^T \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_1^T \boldsymbol{\phi}_1 - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3L+2}$$

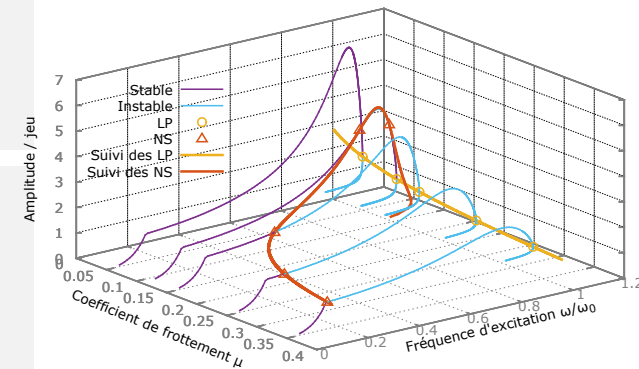
$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \kappa, \omega)$ taille $3L+2$

courbe de réponse
caractérisation des NS et PD

normalisation de $\boldsymbol{\phi}_1$ et $\boldsymbol{\phi}_2$

**Continuation des bifurcations
par rapport au paramètre α**

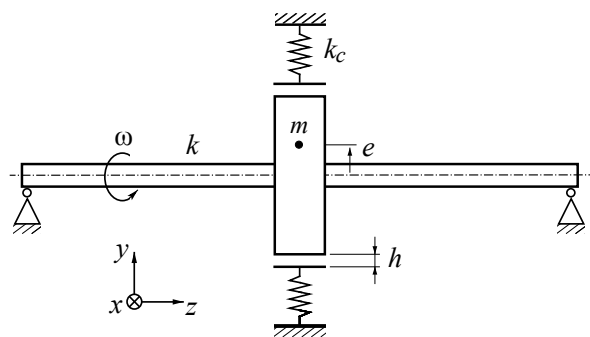
$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}, \alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \\ \text{longueur d'arc} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$



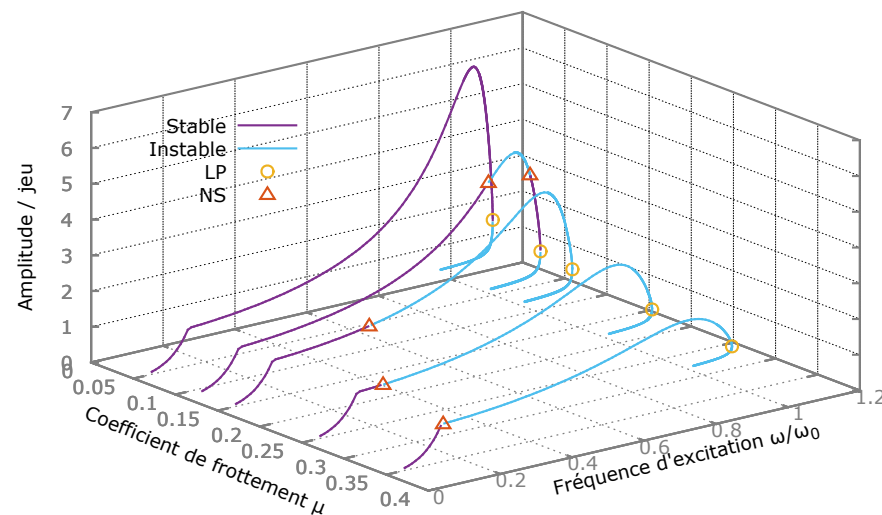
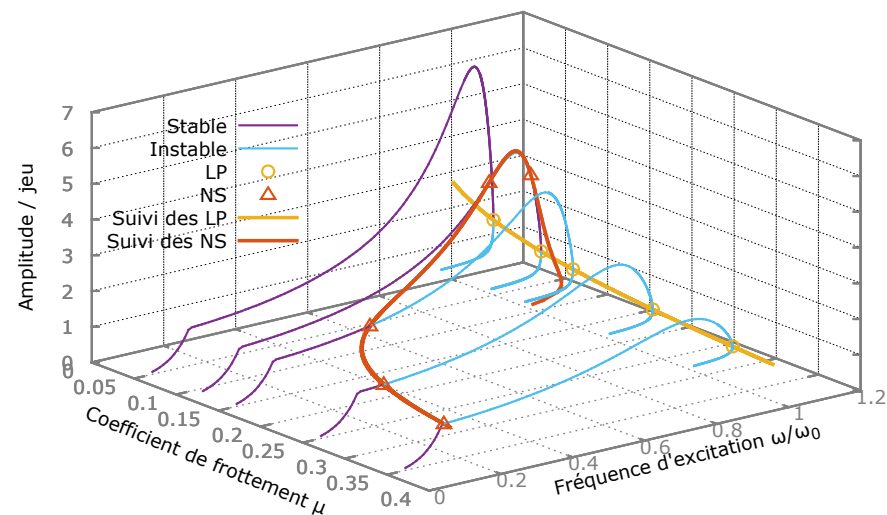
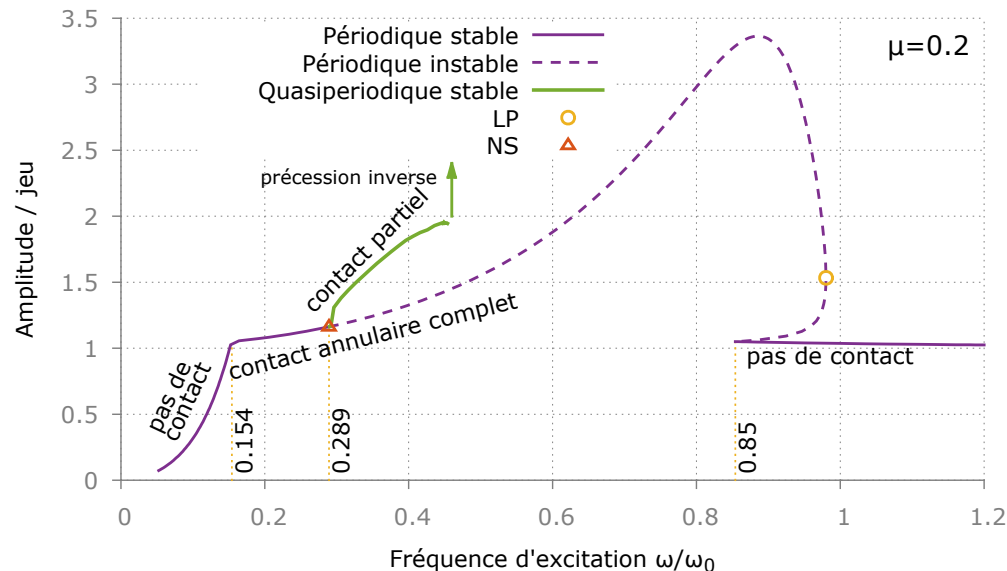
L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. *Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems*. MSSP, 88, 445–461, 2017. doi: [10.1016/j.ymssp.2016.09.037](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.09.037).

Suivi numérique des bifurcations

Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator



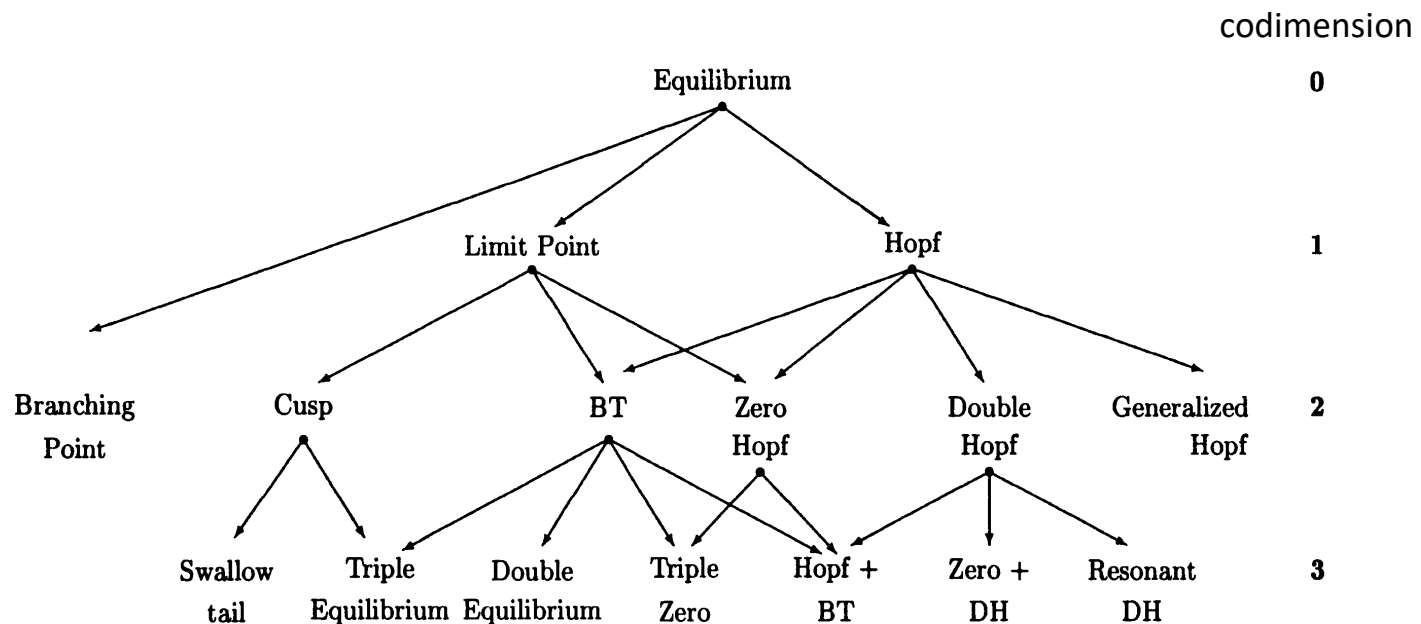
Dans la pratique, on ne calcule pas **toutes** les courbes de réponses !



- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- **Bifurcations de codimension 1 et 2**
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

Bifurcations de codimension 1 et 2

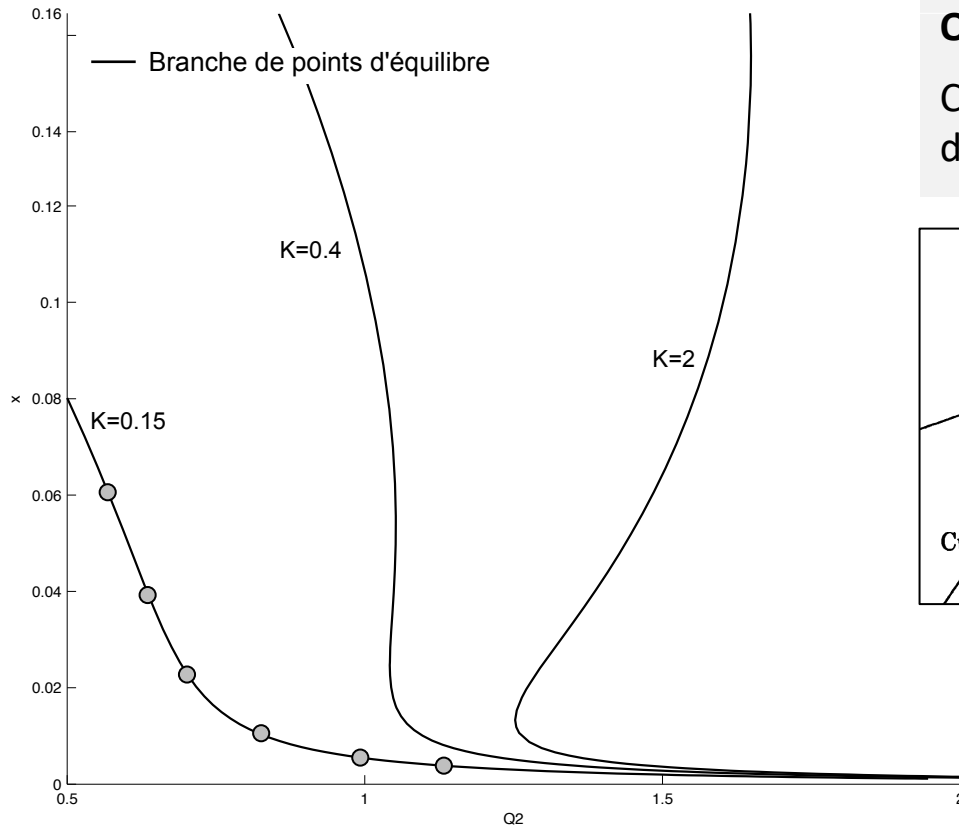
		Niveau de continuation
	Solution périodique	0
Courbe de réponse	Point limite (LP)	1
	Point de branchement (BP)	
	Neimark-Sacker (NS)	
	Doublément de période (PD)	
Suivi de bifurcations	Bifurcations sur les branches de bifurcations ?	2



W. Govaerts, Y. A. Kuznetsov, and B. Sijnave. *Continuation of codimension-2 equilibrium bifurcations in Content*.

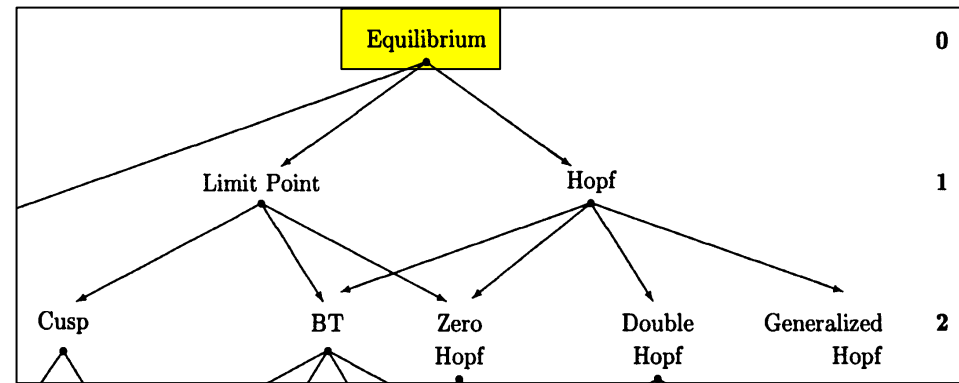
In *Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems*, Springer, 2000. doi: [10.1007/978-1-4612-1208-9_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1208-9_7)

Bifurcations de codimension 1 et 2

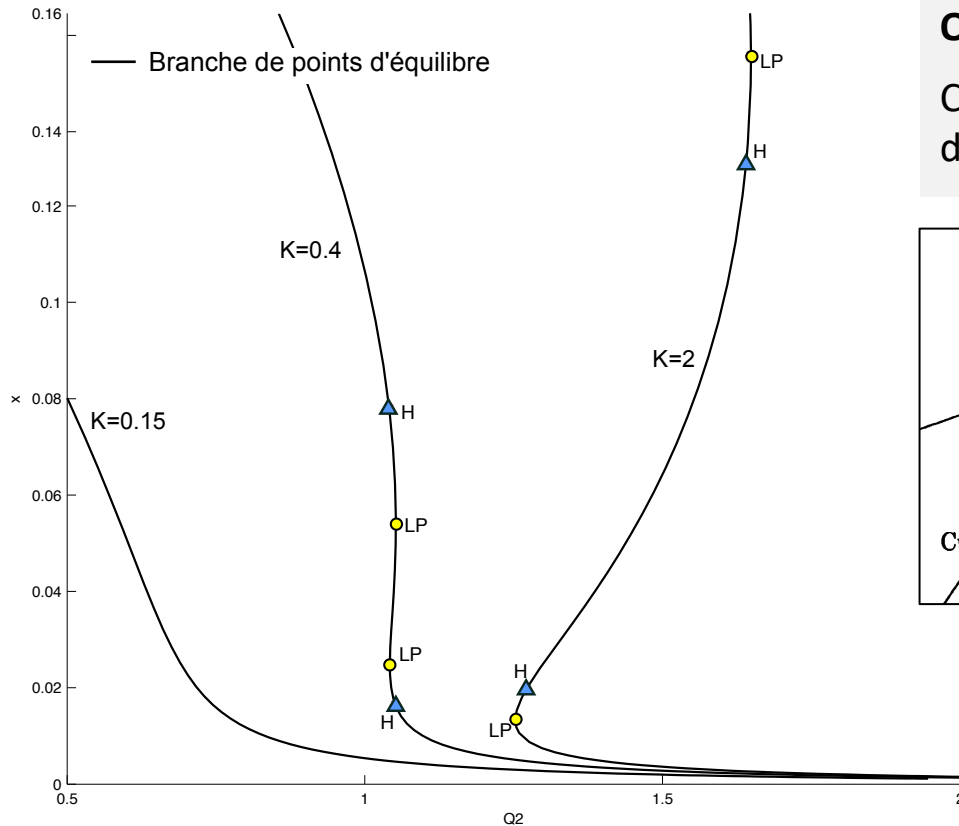


Oscillateur catalytique

Courbes de réponses $x - Q2$ pour plusieurs valeurs du paramètre K

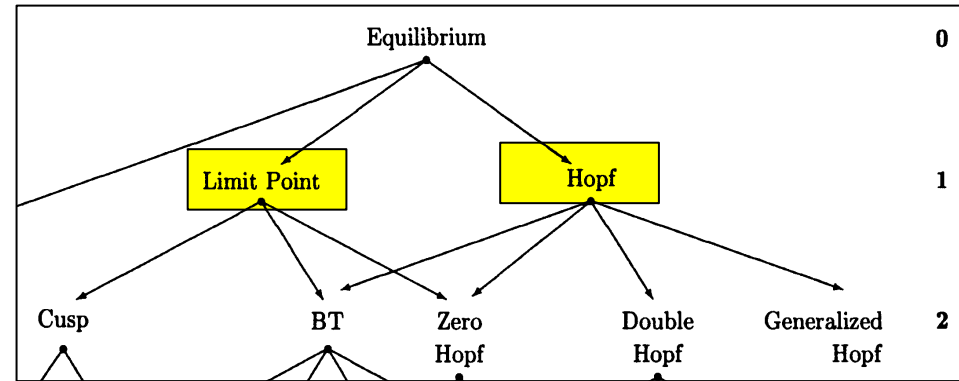


Bifurcations de codimension 1 et 2



Oscillateur catalytique

Courbes de réponses $x - Q2$ pour plusieurs valeurs du paramètre K + **bifurcations**

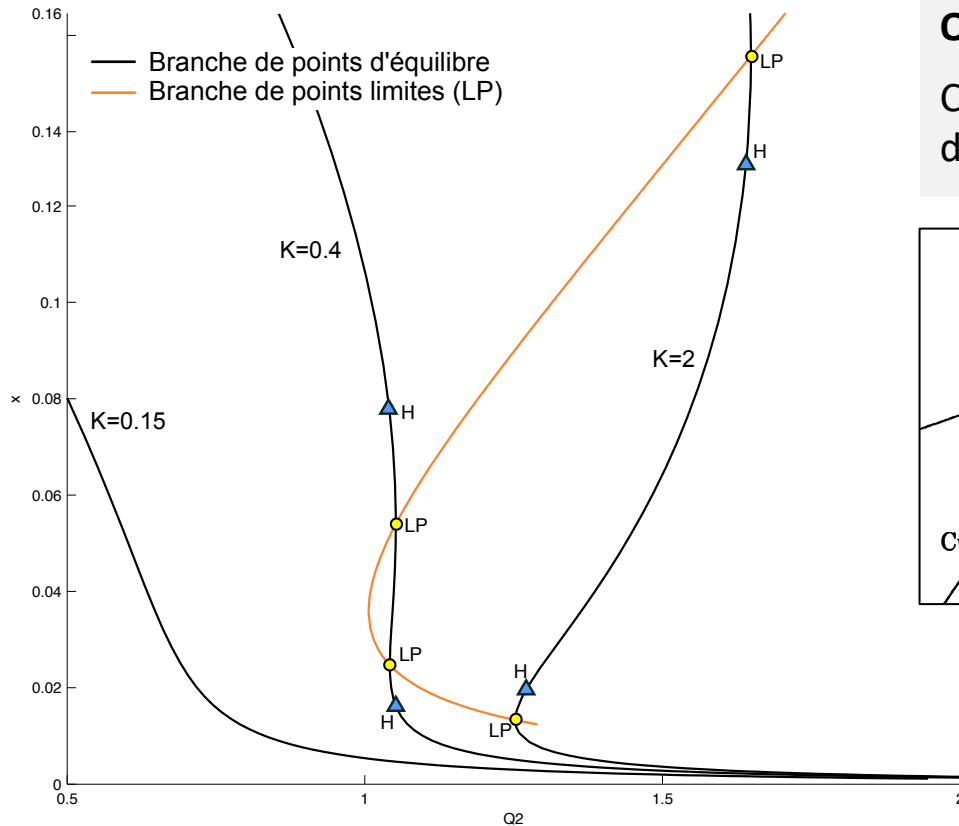


K=0.15 Pas de bifurcation

K=0.4 2 bifurcations LP (extremums selon Q2)

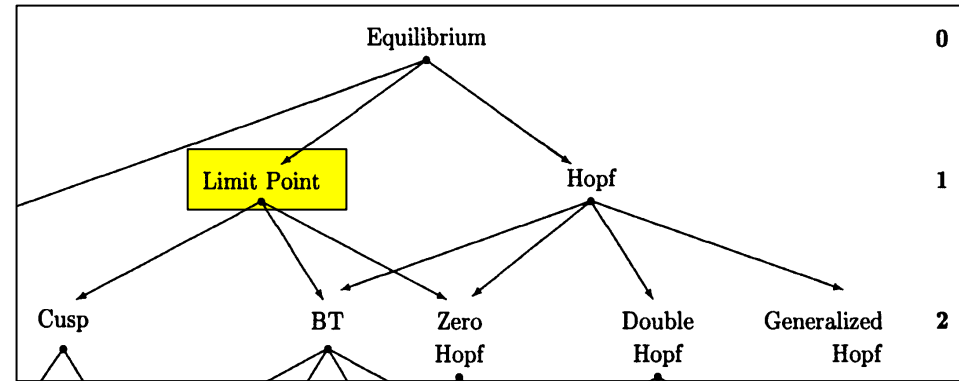
K=2 + 2 bifurcations Hopf

Bifurcations de codimension 1 et 2

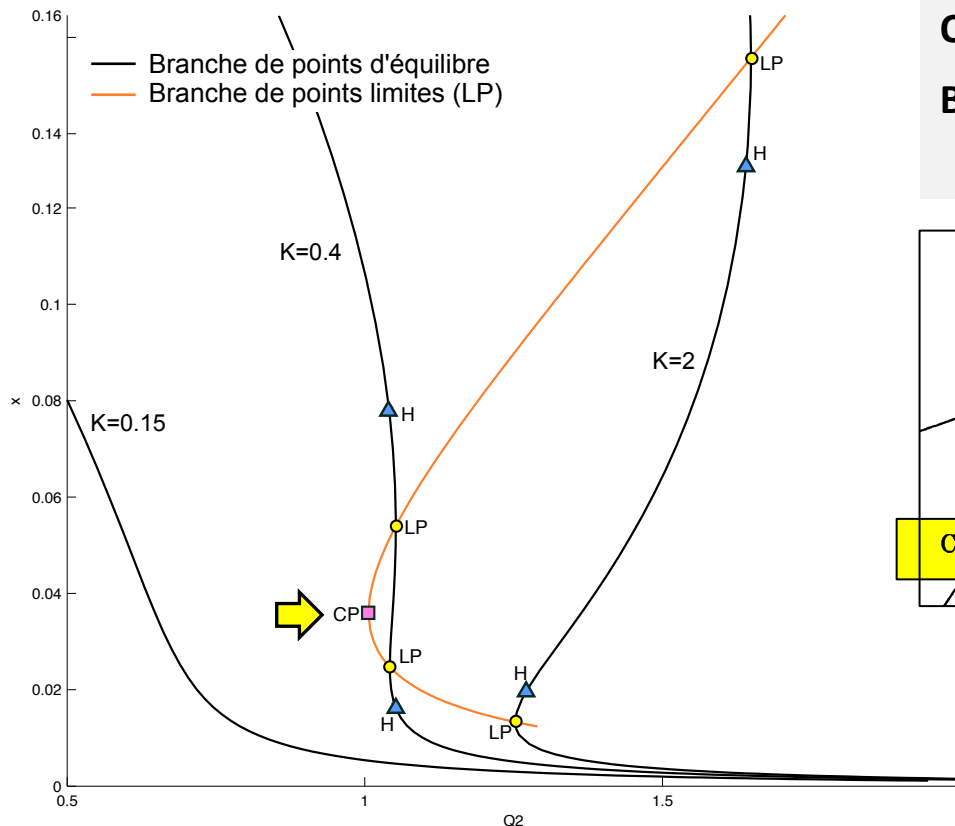


Oscillateur catalytique

Courbes de réponses $x - Q2$ pour plusieurs valeurs du paramètre K + suivi des LP

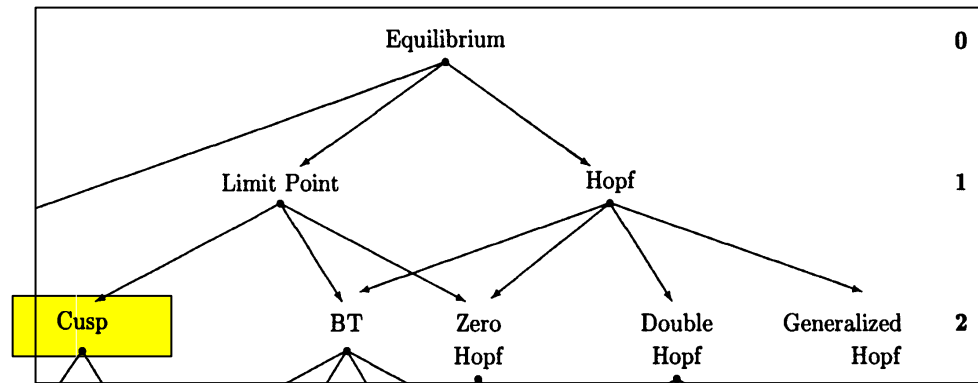


Bifurcations de codimension 1 et 2



Oscillateur catalytique

Bifurcations sur la branche de suivi des LP



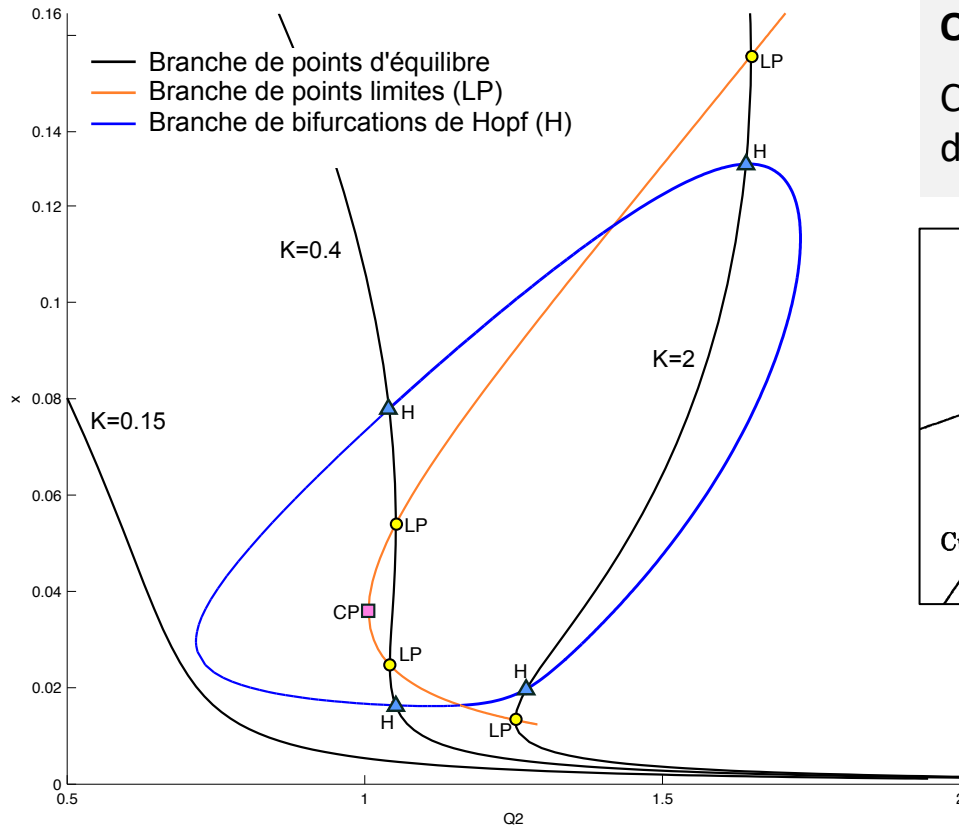
Cusp (CP)

Un exposant de Floquet $\Lambda = 0$ (LP) + $\mathbf{R}_{XX}$ singulier

Point limite sur la branche de LP.

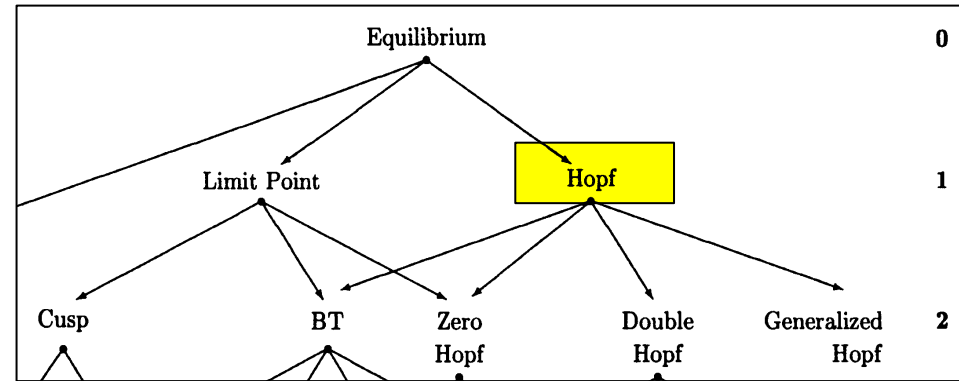
Marque l'apparition/disparition des LP, i.e. d'une zone à solutions multiples.

Bifurcations de codimension 1 et 2

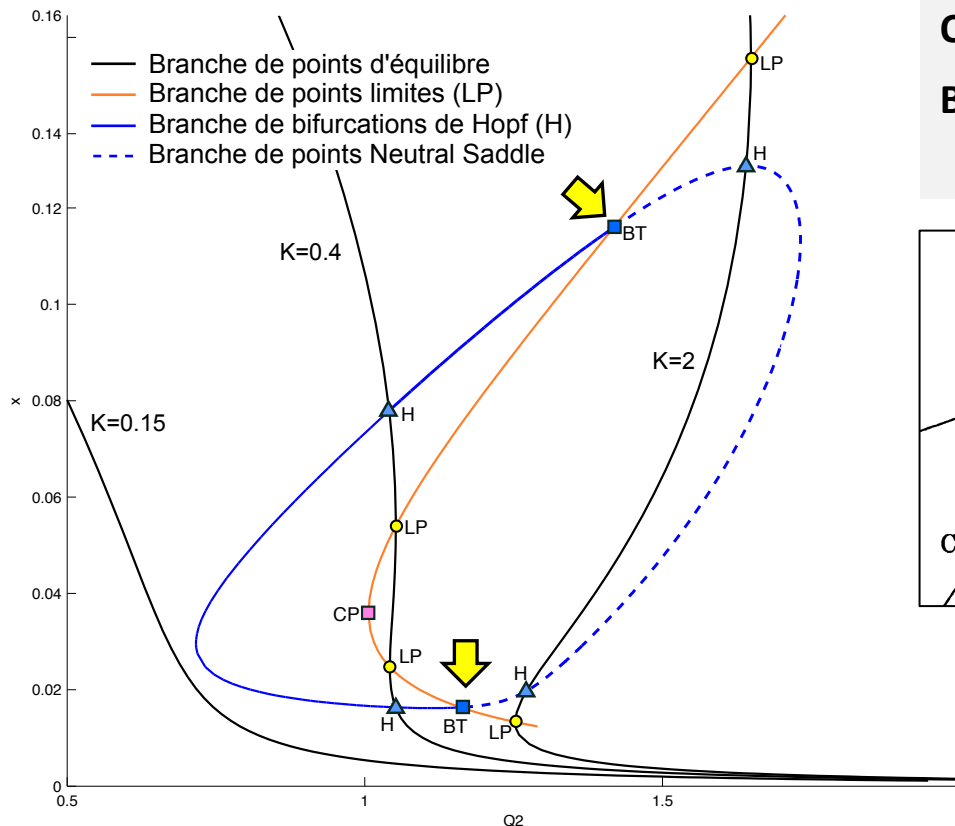


Oscillateur catalytique

Courbes de réponses $x - Q2$ pour plusieurs valeurs du paramètre K + suivi des Hopf

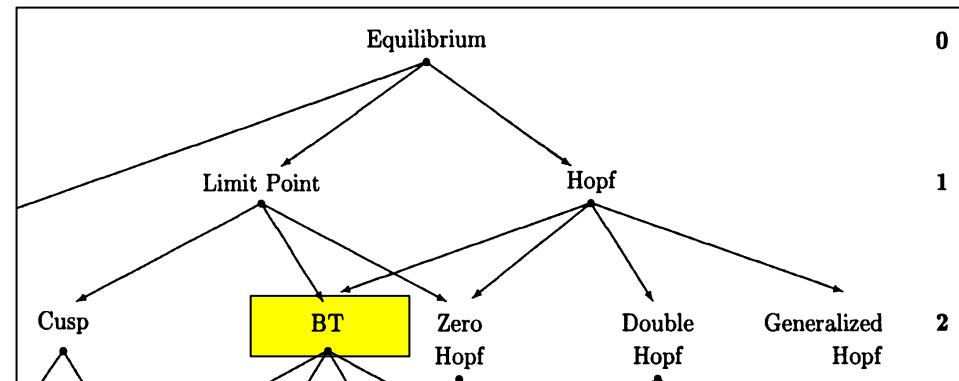


Bifurcations de codimension 1 et 2



Oscillateur catalytique

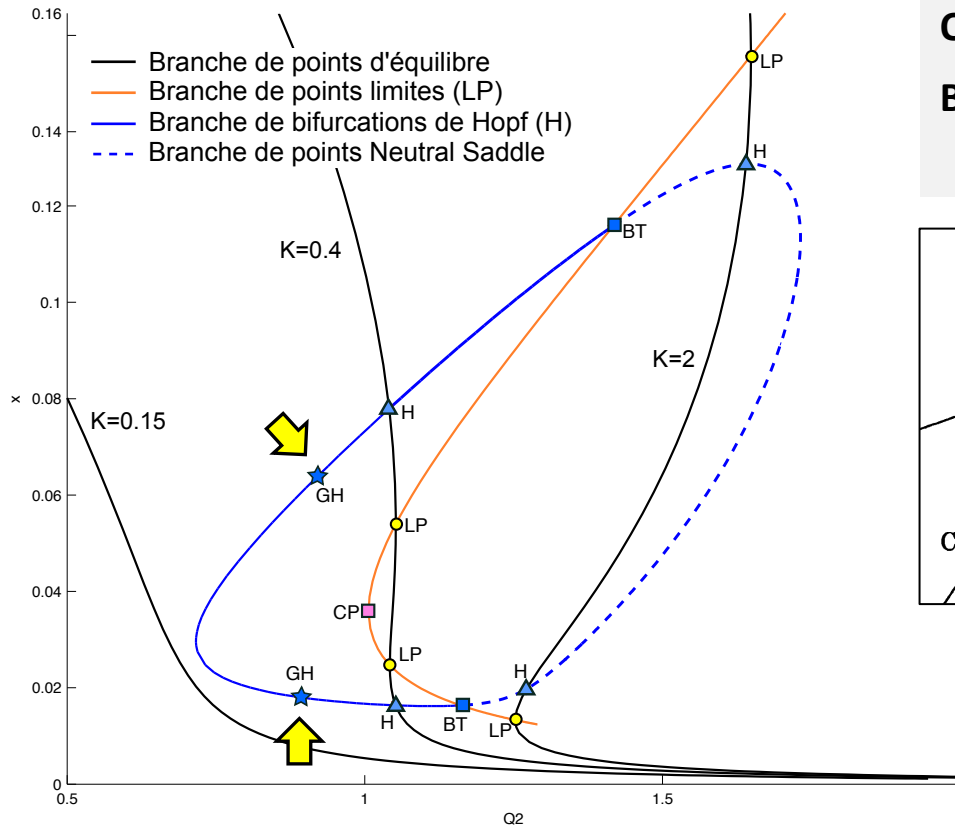
Bifurcations sur la branche de suivi des Hopf



Bogdanov-Takens (BT)

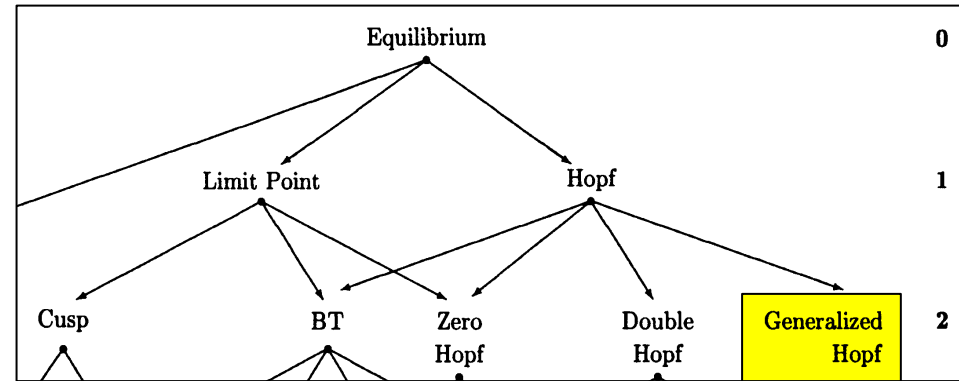
Deux exposants de Floquet $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ (mais multiplicité géométrique 1).
 Une branche de Hopf émane d'une bifurcation BT qui $\in$ branche de LP.
 Les Hopf deviennent des neutral saddle en traversant les BT.
 Hopf + neutral saddle = boucle fermée

Bifurcations de codimension 1 et 2



Oscillateur catalytique

Bifurcations sur la branche de suivi des Hopf

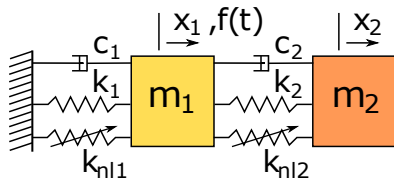


Generalized Hopf (GH)

Transition entre les bifurcations de Hopf sous-critiques et sur-critiques.

- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)



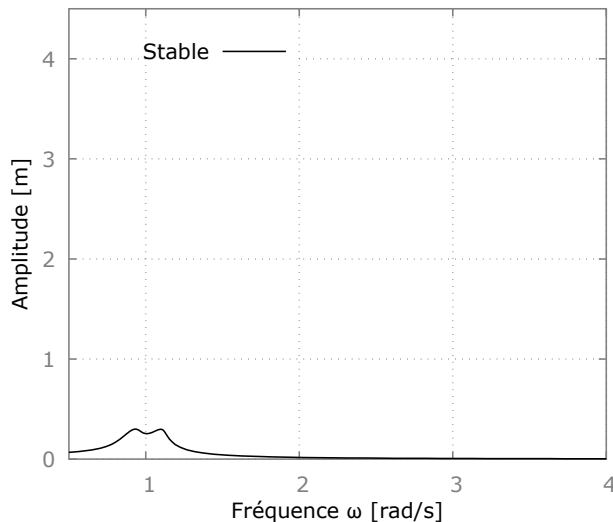
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTVA : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

Courbe de réponse - $f_0 = 0.05\text{N}$

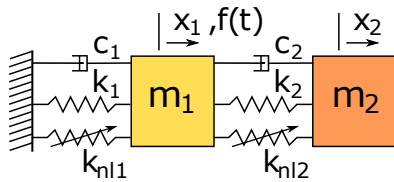


2 pics de même amplitude (equal-peak method)



Detroux, Habib, Masset, Kerschen. *Performance, robustness and sensitivity analysis of the nonlinear tuned vibration absorber*. MSSP 2015, doi: [10.1016/j.ymssp.2015.01.035](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.01.035)

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)



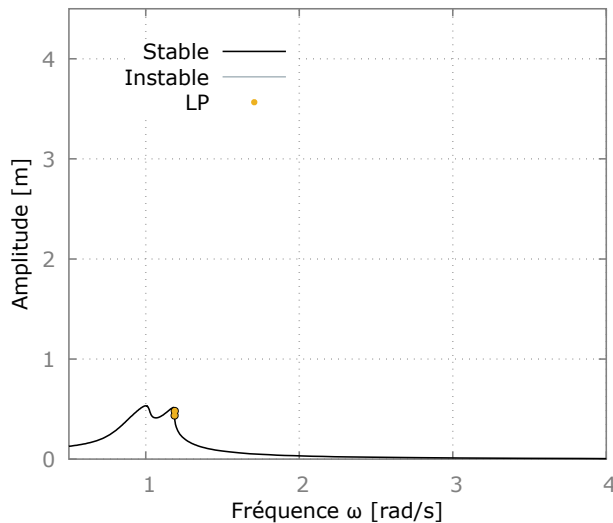
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTVA : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

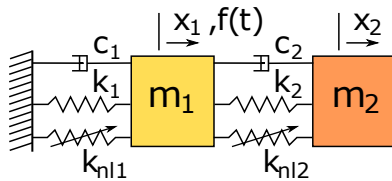
Courbe de réponse - $f_0 = 0.095\text{N}$



2 pics de même amplitude (equal-peak method)

Apparition LP / zones à solutions multiples sur le 2^{ème} pic

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)



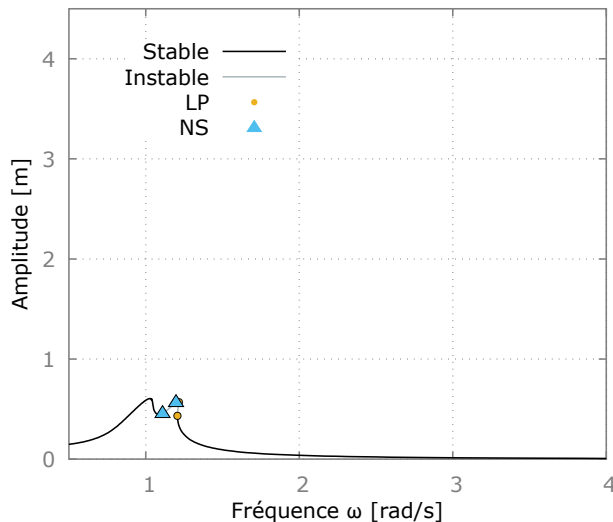
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTVA : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

Courbe de réponse - $f_0 = 0.11\text{N}$

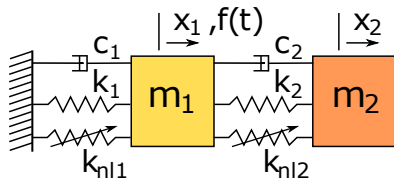


2 pics de même amplitude (equal-peak method)

Apparition LP / zones à solutions multiples sur le 2^{ème} pic

Bifurcations NS sur le 2^{ème} pic

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)



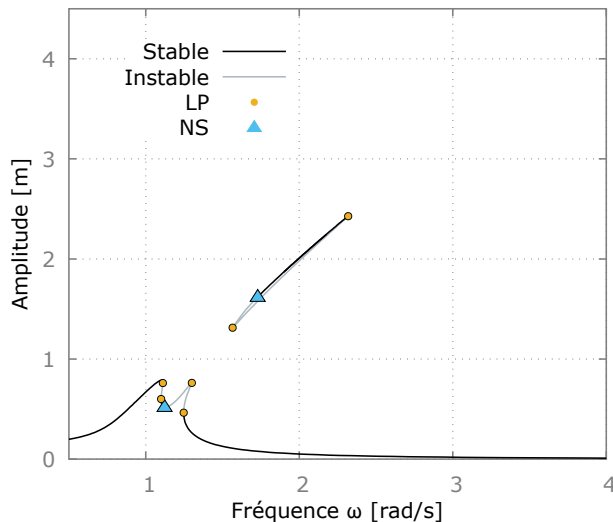
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTVA : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

Courbe de réponse - $f_0 = 0.15\text{N}$



2 pics de même amplitude (equal-peak method)

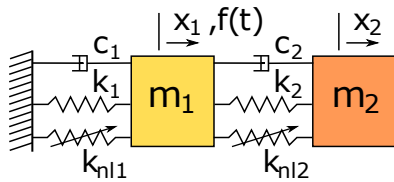
Apparition LP / zones à solutions multiples sur le 2^{ème} pic

Bifurcations NS sur le 2^{ème} pic

Bifurcations LP sur le 1^{er} pic

Isola / branche détachée du 2^{ème} pic

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)



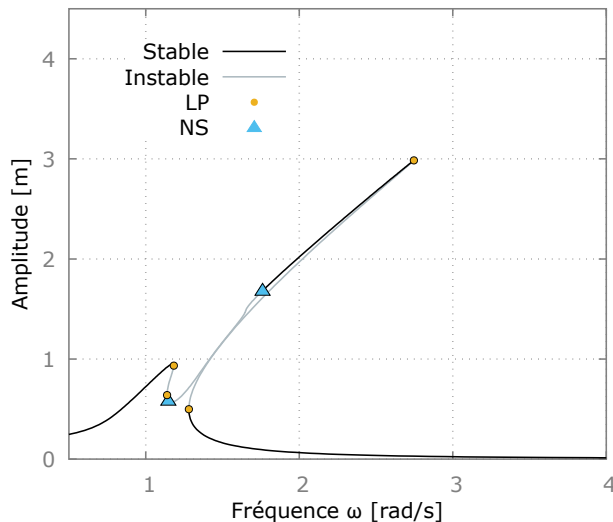
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTVA : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

Courbe de réponse - $f_0 = 0.19\text{N}$



2 pics de même amplitude (equal-peak method)

Apparition LP / zones à solutions multiples sur le 2^{ème} pic

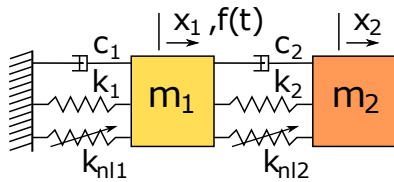
Bifurcations NS sur le 2^{ème} pic

Bifurcations LP sur le 1^{er} pic

Isola / branche détachée du 2^{ème} pic

Fusion de l'isola avec le 2^{ème} pic (fin equal peak)

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)



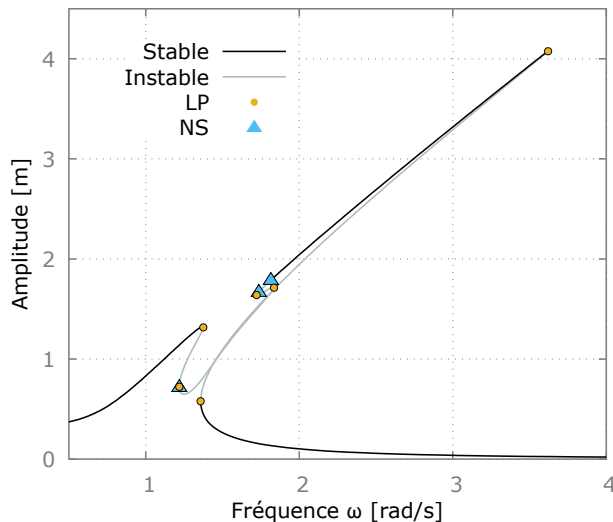
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTVA : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

Courbe de réponse - $f_0 = 0.30\text{N}$



2 pics de même amplitude (equal-peak method)

Apparition LP / zones à solutions multiples sur le 2^{ème} pic

Bifurcations NS sur le 2^{ème} pic

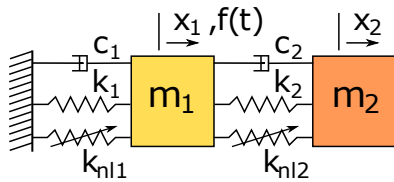
Bifurcations LP sur le 1^{er} pic

Isola / branche détachée du 2^{ème} pic

Fusion de l'isola avec le 2^{ème} pic (fin equal peak)

Bifurcations additionnelles sur le 2^{ème} pic

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



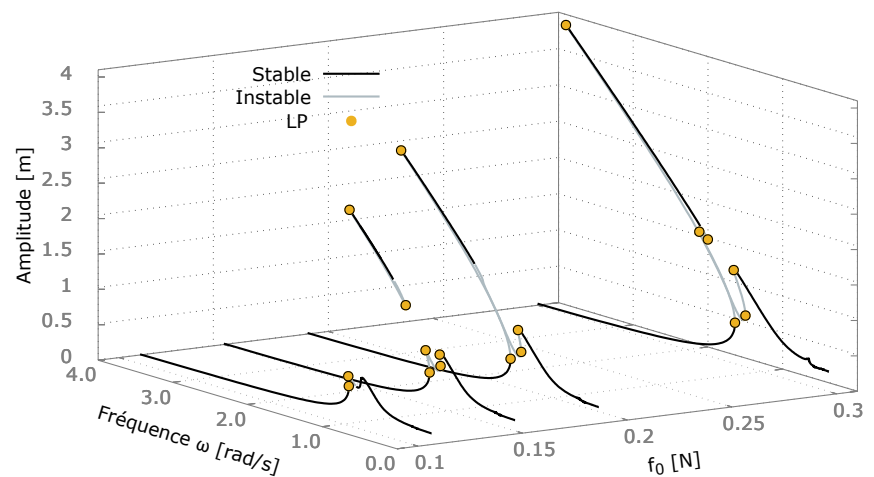
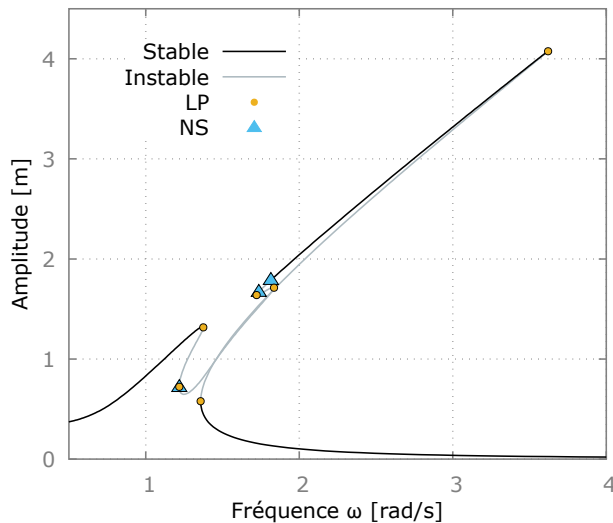
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

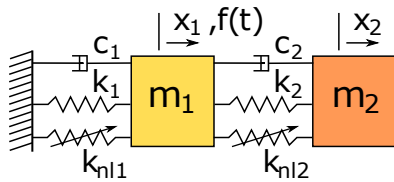
Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

Courbe de réponse - $f_0 = 0.30\text{N}$



Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



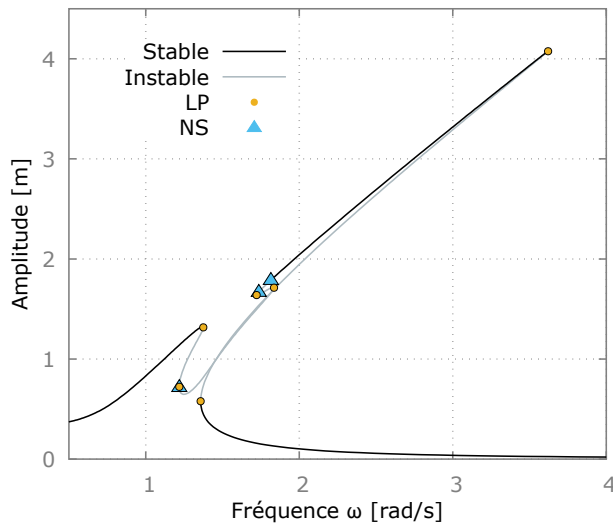
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

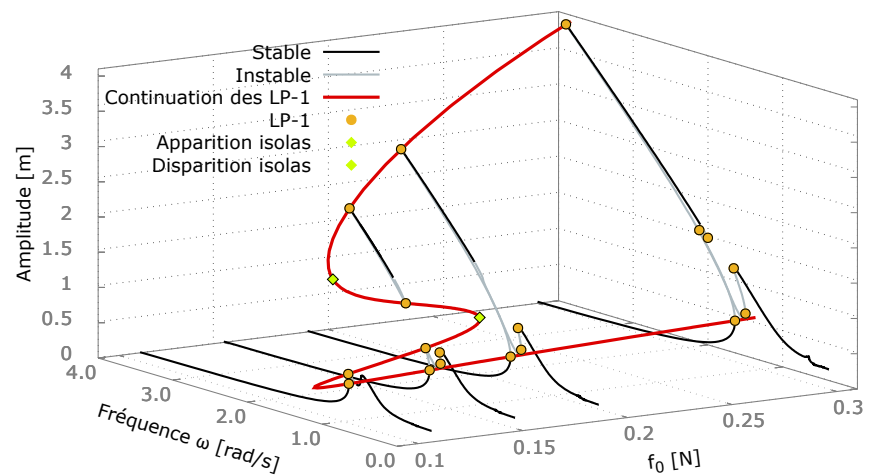
Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

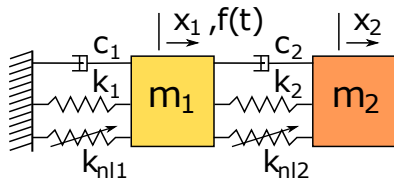
Courbe de réponse - $f_0 = 0.30\text{N}$



Suivi de points limites



Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



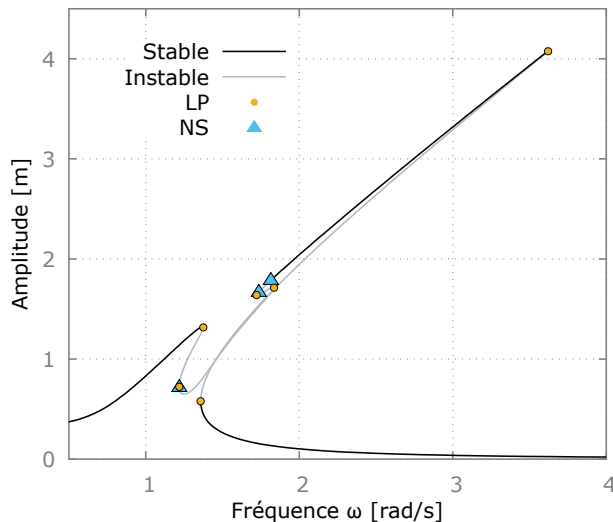
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

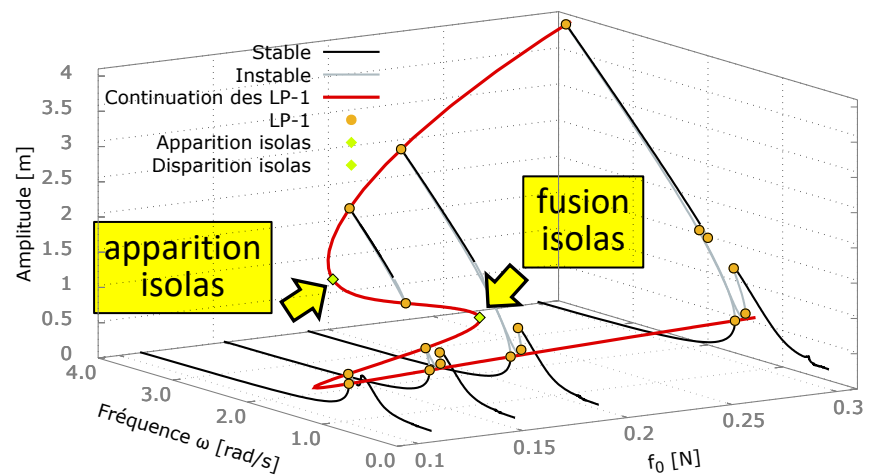
Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

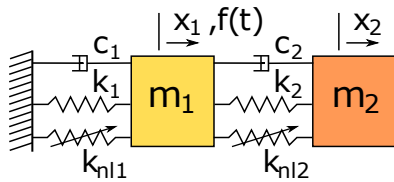
Courbe de réponse - $f_0 = 0.30\text{N}$



Suivi de points limites



Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



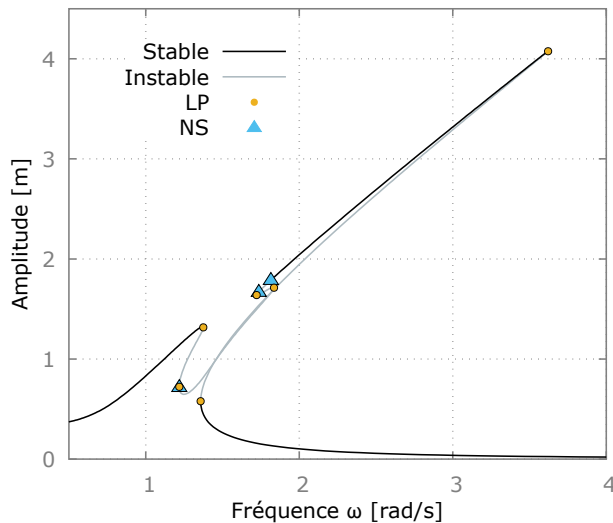
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

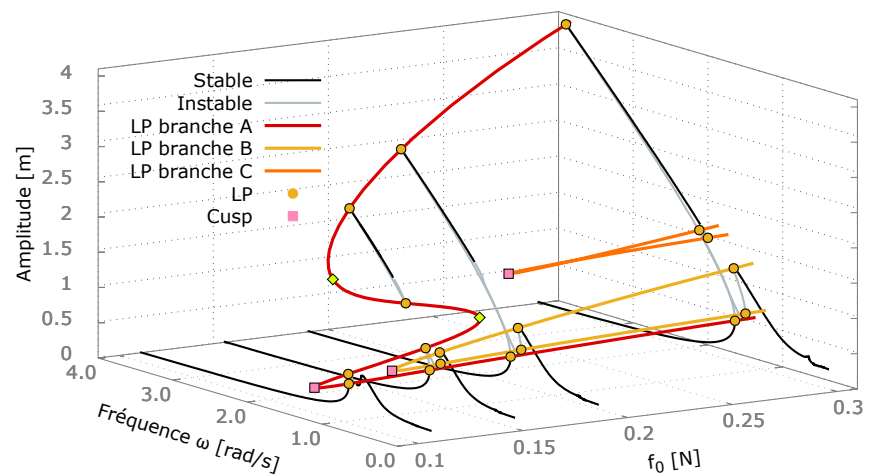
Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

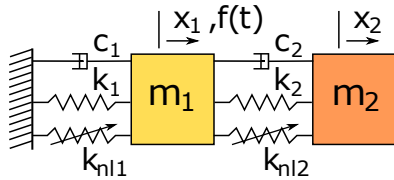
Courbe de réponse - $f_0 = 0.30\text{N}$



Suivi de points limites



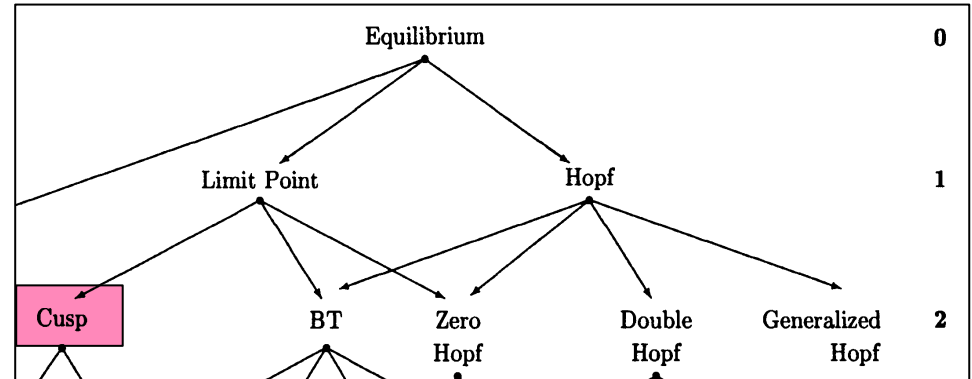
Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



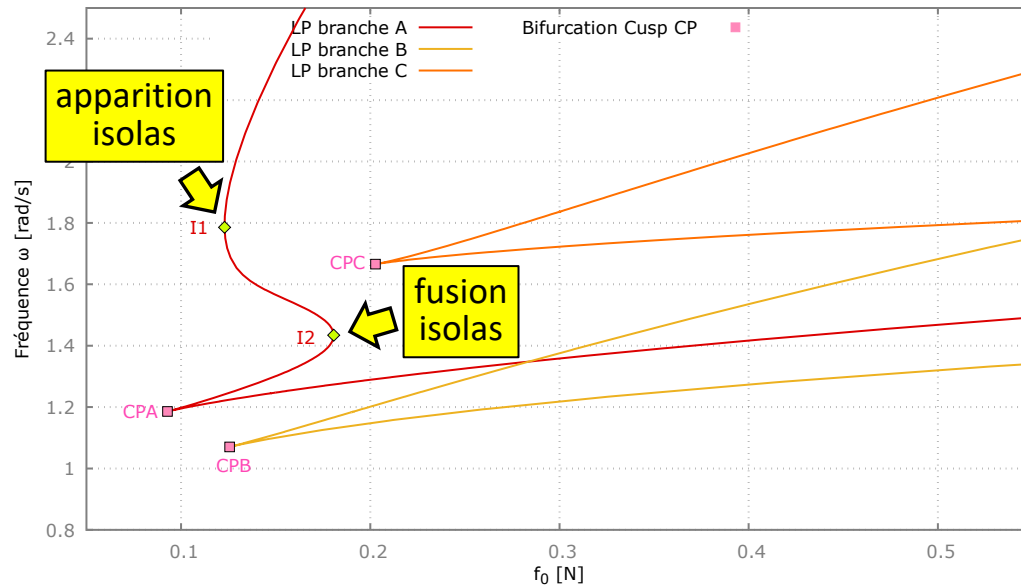
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) -$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$

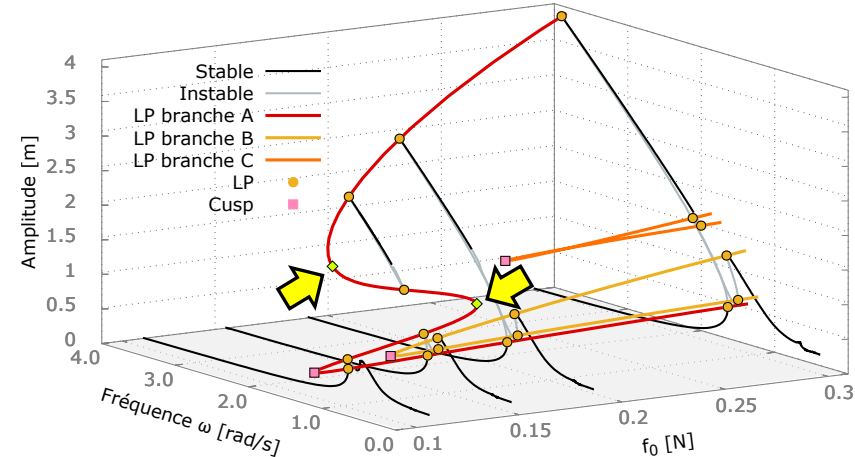
NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$



Projection dans le plan $f_0 - \omega$ des branches de LP

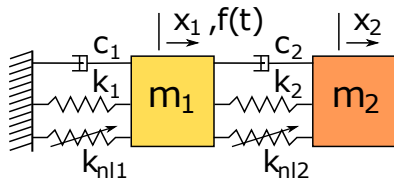


Suivi de points limites



Les points limites sur les branches de LP sont soit des **points de formation/disparition d'isolas**, soit des bifurcations de co-dimension 2 de type **Cusp (CP)**.

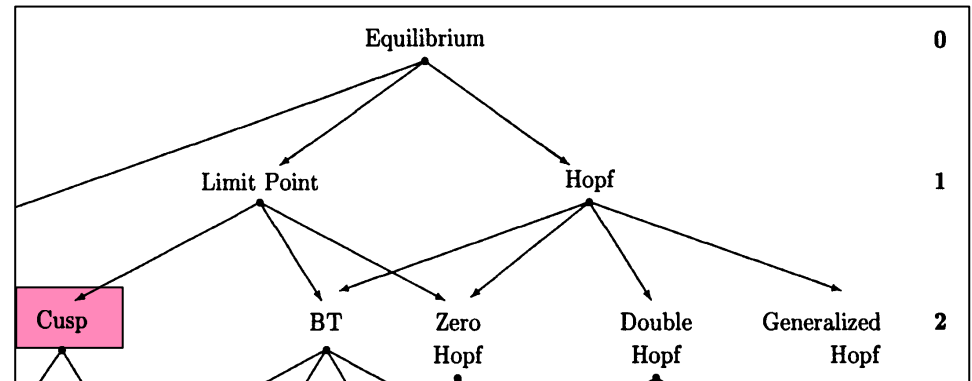
Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



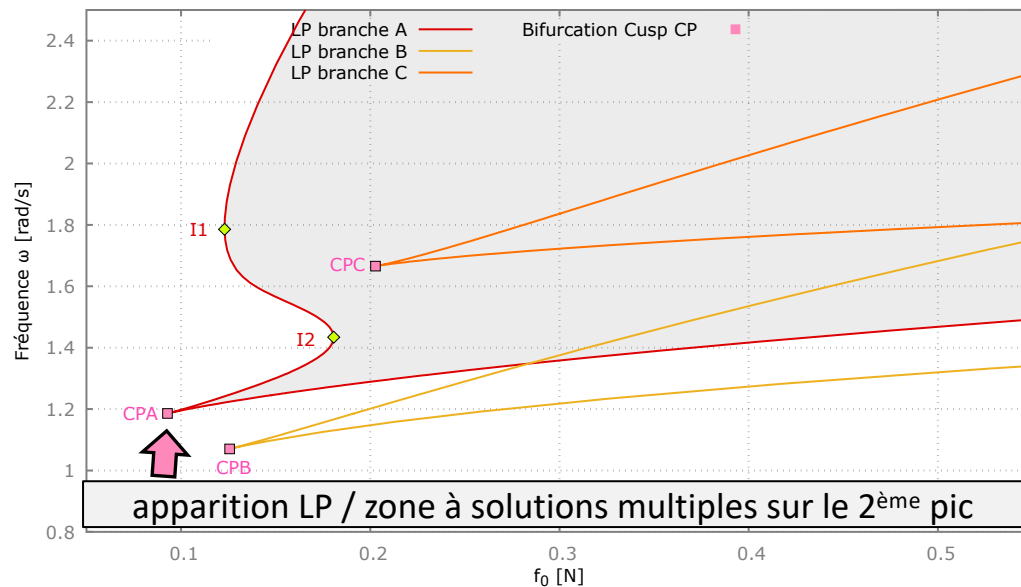
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) -$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N}$

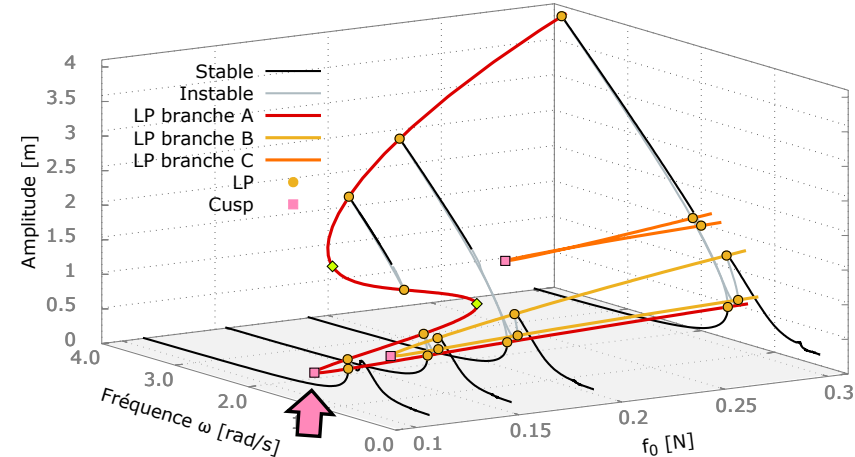
NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N}$



Projection dans le plan $f_0 - \omega$ des branches de LP

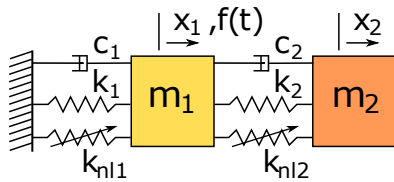


Suivi de points limites



Les points limites sur les branches de LP sont soit des **points de formation/disparition d'isolats**, soit des bifurcations de co-dimension 2 de type **Cusp (CP)**.

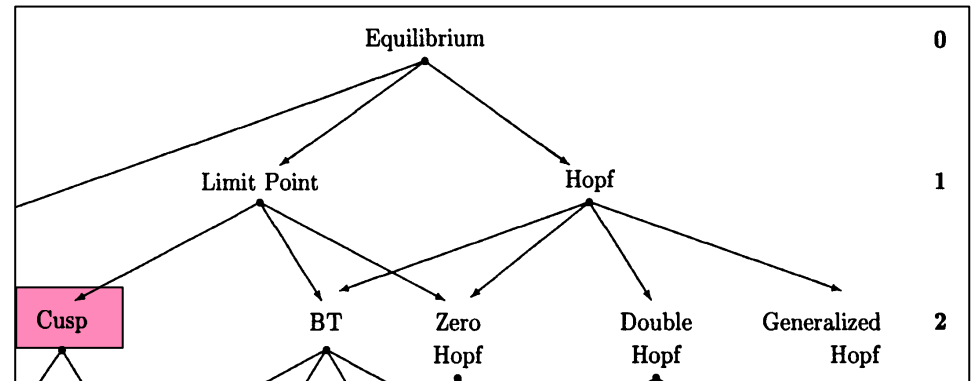
Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



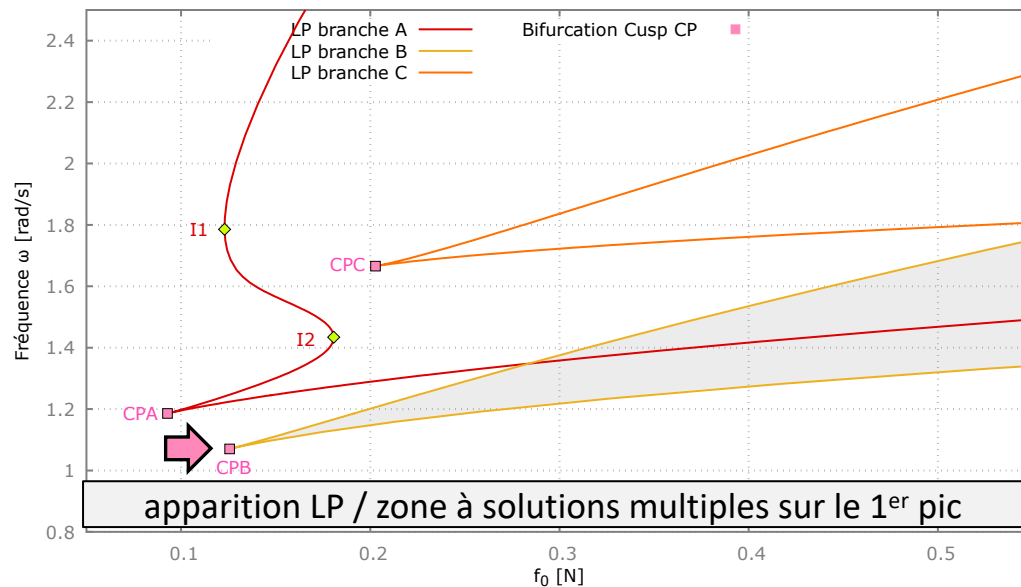
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) -$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N}$

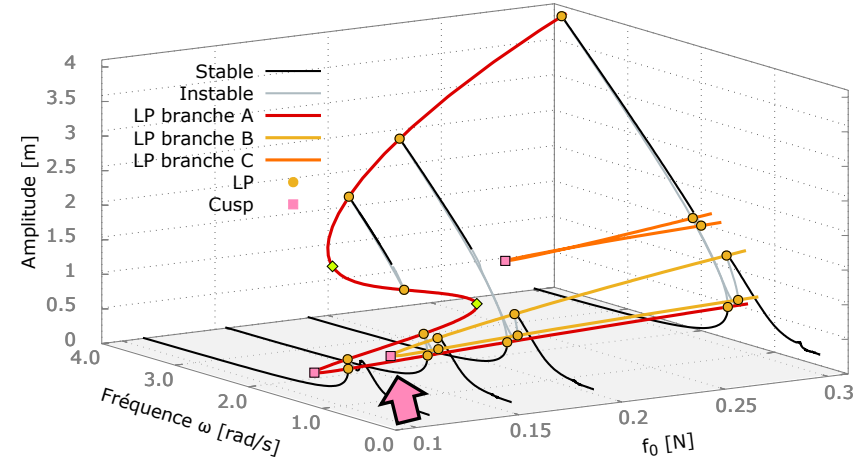
NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N}$



Projection dans le plan $f_0 - \omega$ des branches de LP

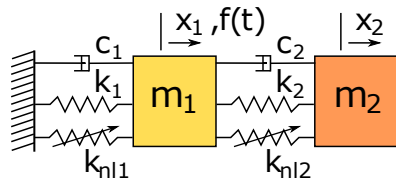


Suivi de points limites



Les points limites sur les branches de LP sont soit des **points de formation/disparition d'isolats**, soit des bifurcations de co-dimension 2 de type **Cusp (CP)**.

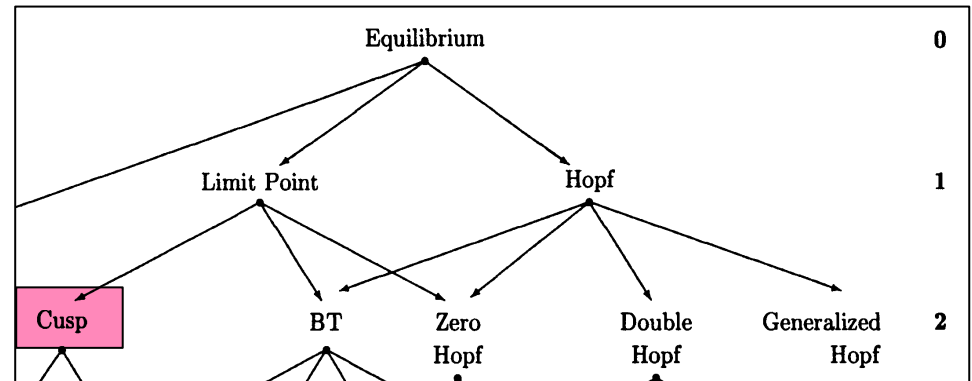
Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



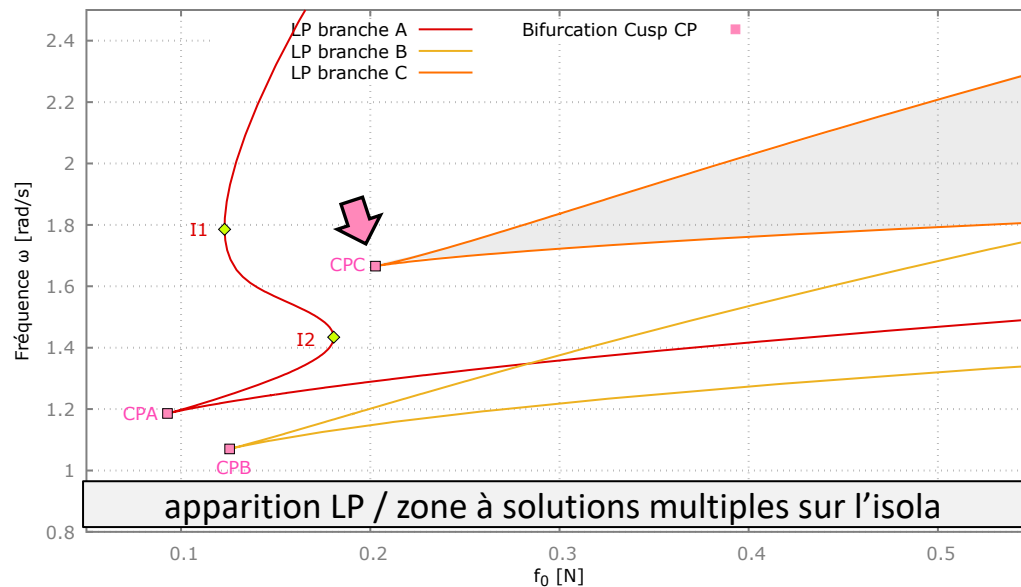
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) -$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N}$

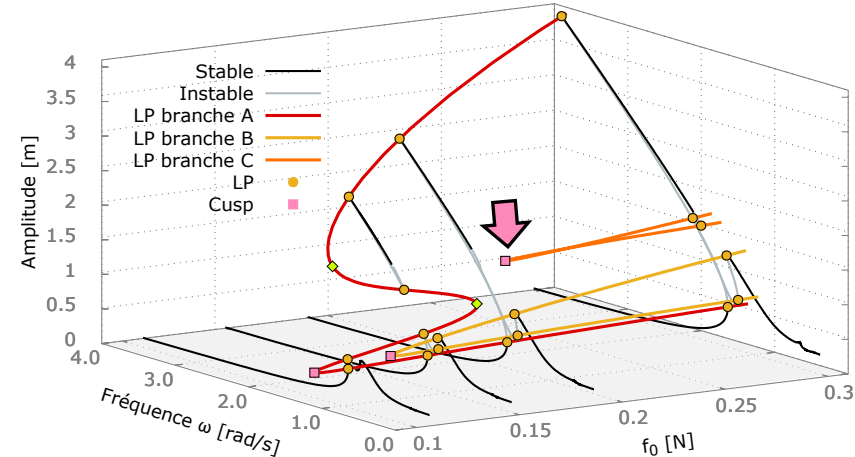
NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N}$



Projection dans le plan $f_0 - \omega$ des branches de LP

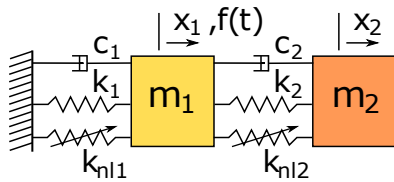


Suivi de points limites



Les points limites sur les branches de LP sont soit des **points de formation/disparition d'isolas**, soit des bifurcations de co-dimension 2 de type **Cusp (CP)**.

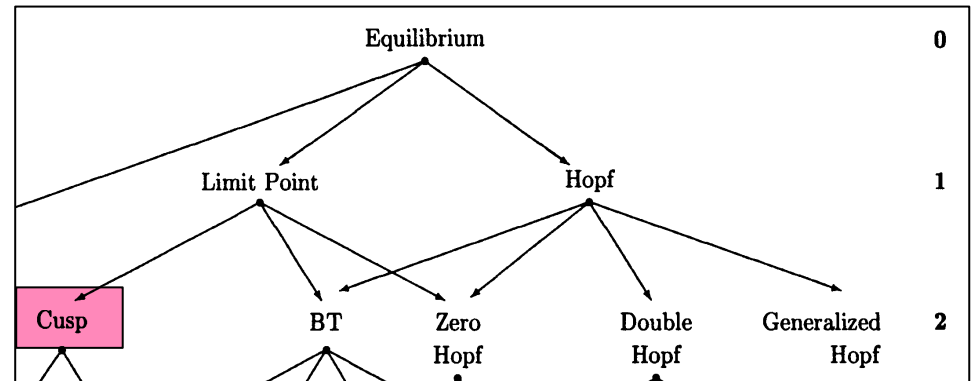
Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



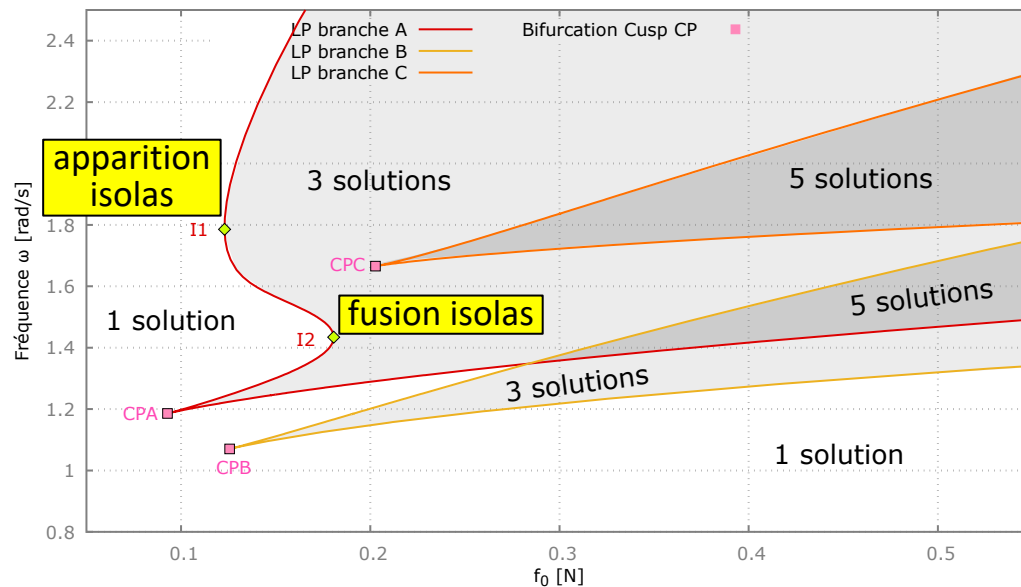
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) -$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N}$

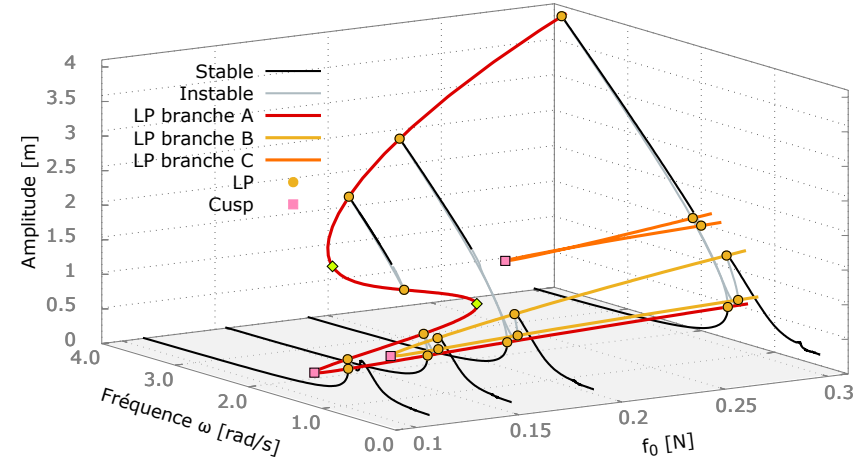
NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N}$



Projection dans le plan $f_0 - \omega$ des branches de LP

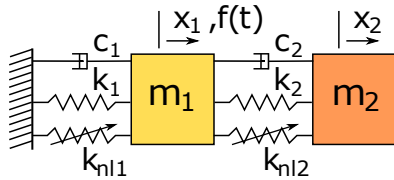


Suivi de points limites



Les points limites sur les branches de LP sont soit des **points de formation/disparition d'isolas**, soit des bifurcations de co-dimension 2 de type **Cusp (CP)**.

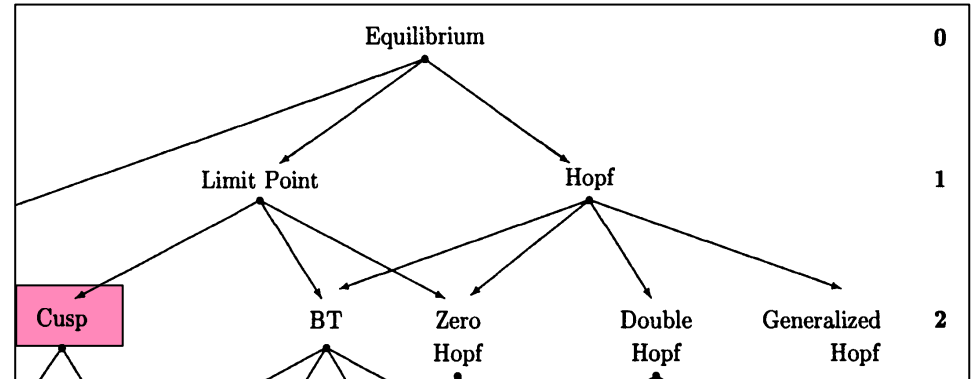
Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



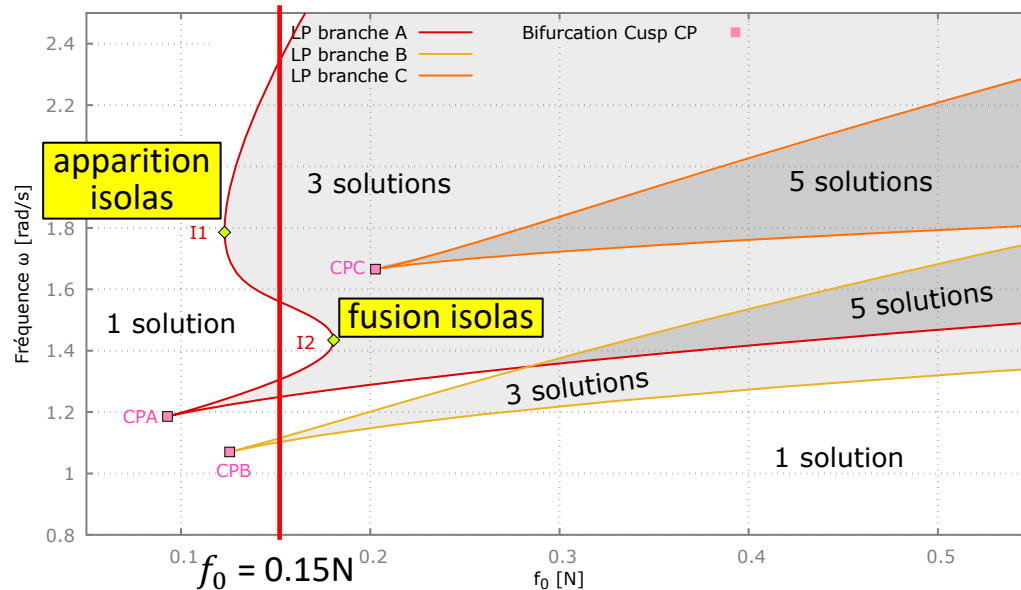
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) -$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N}$

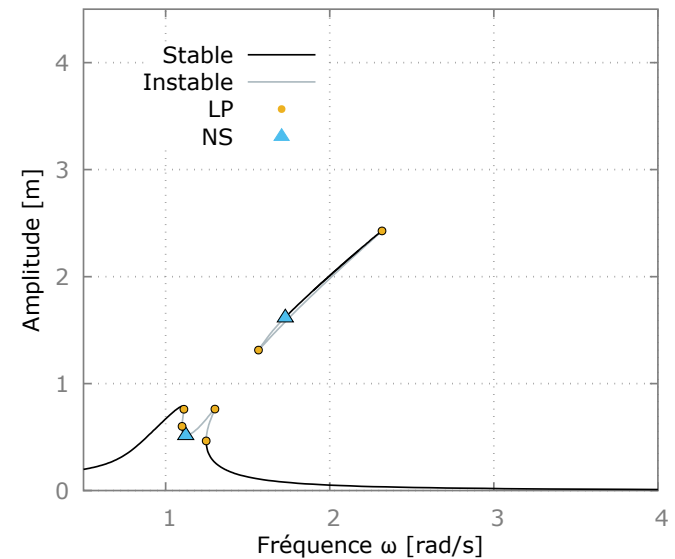
NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N}$



Projection dans le plan $f_0 - \omega$ des branches de LP

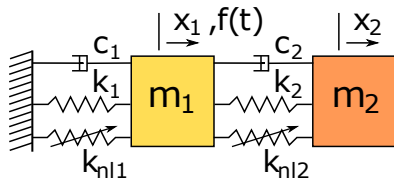


Courbe de réponse - $f_0 = 0.15\text{N}$



Les points limites sur les branches de LP sont soit des **points de formation/disparition d'isolas**, soit des bifurcations de co-dimension 2 de type **Cusp (CP)**.

Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



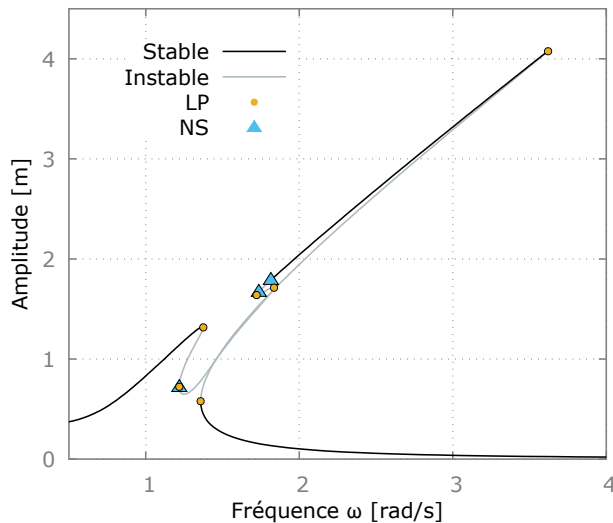
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0$$

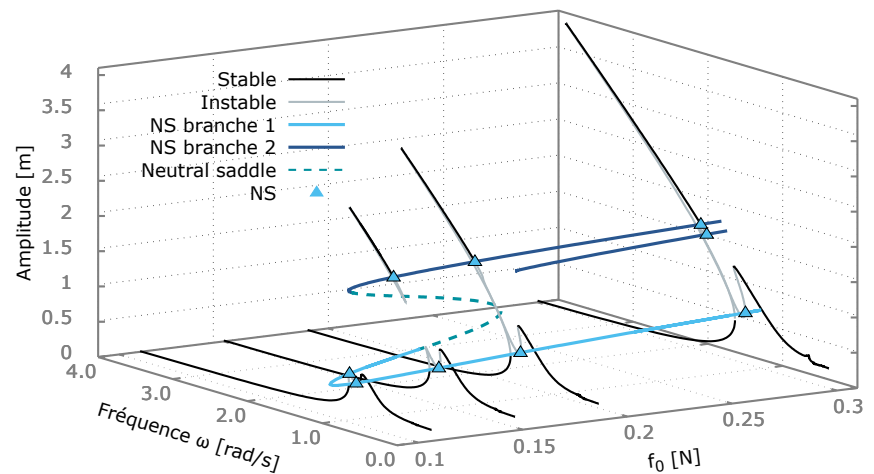
Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$ $k_{nl1} = 1\text{N/m}^3$

NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$ $k_{nl2} = 0.0042\text{N/m}^3$

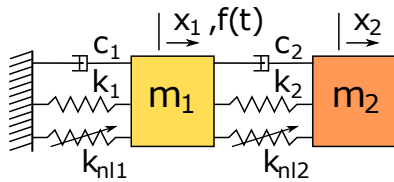
Courbe de réponse - $f_0 = 0.30\text{N}$



Suivi de bifurcations de Neimark-Sacker (NS)



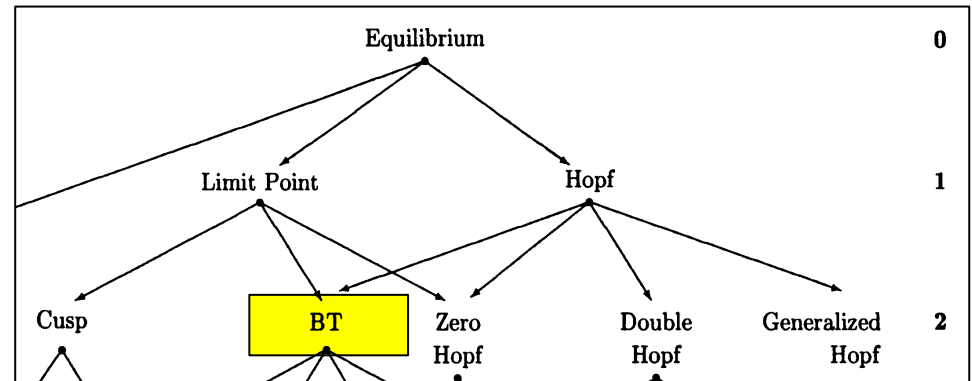
Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTV)



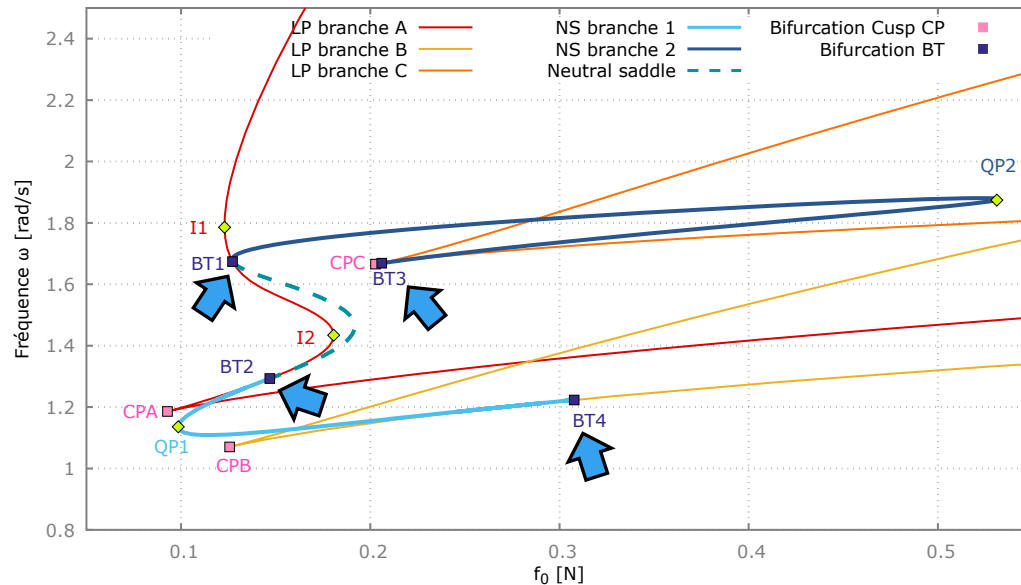
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_1 \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) +$$

Structure principale : $m_1 = 1\text{kg}$ $c_1 = 0.002\text{Ns/m}$ $k_1 = 1\text{N/m}$

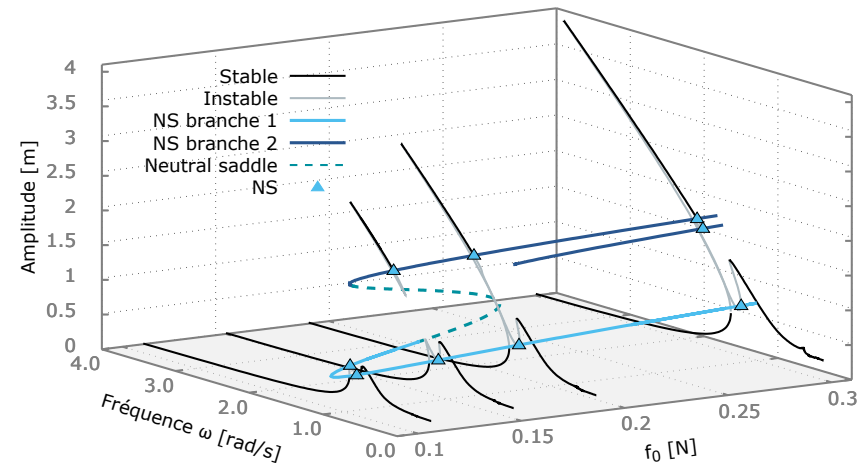
NLTV : $\varepsilon = m_1/m_2 = 5\%$ $c_2 = 0.0128\text{Ns/m}$ $k_2 = 0.0454\text{N/m}$



Projection dans le plan $f_0 - \omega$ des branches de LP + NS



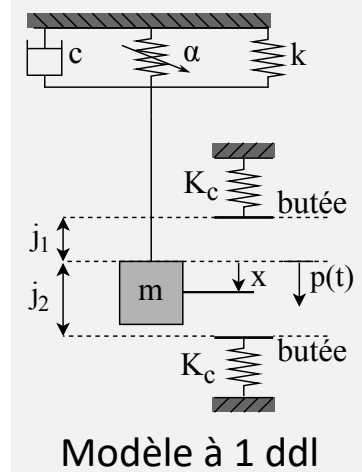
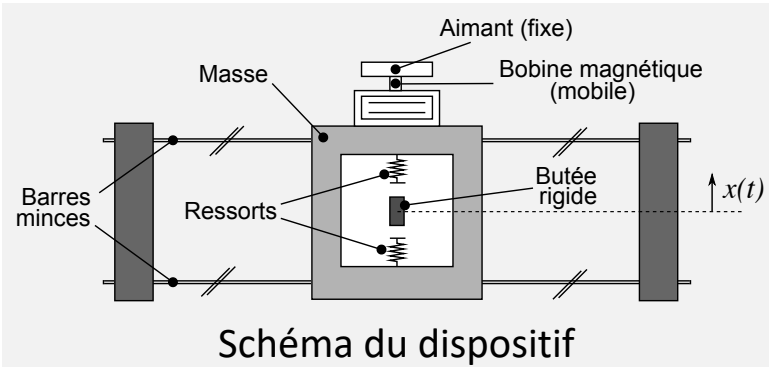
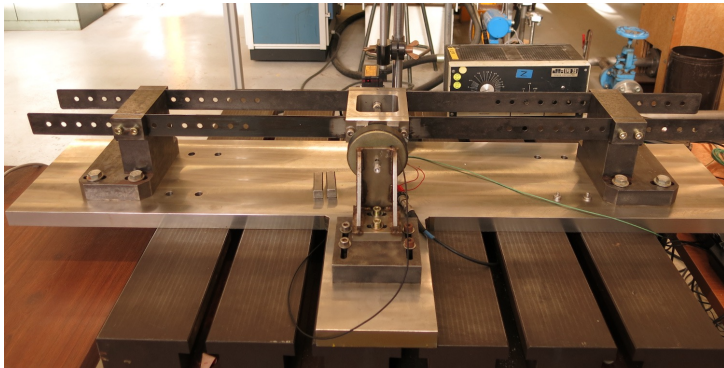
Suivi de bifurcations de Neimark-Sacker (NS)



Les branches de de bifurcations de Neimark-Sacker (NS) naissent et finissent aux points de bifurcations de co-dimension 2 de type **Bogdanov-Takens (BT)** et deviennent des Neutral-Saddle en les traversant.

- Phénomènes non linéaires indésirables
- De l'utilité d'étudier les bifurcations
- Outils numériques pour l'analyse de bifurcations
 - Continuation des solutions périodiques
 - Stabilité des solutions périodiques
 - Calcul et suivi des bifurcations
- Bifurcations de codimension 1 et 2
- Applications
 - Absorbeur de vibrations non linéaire accordé (NLTVA)
 - Système KOALA avec jeux et impacts

Système KOALA avec jeux et impacts



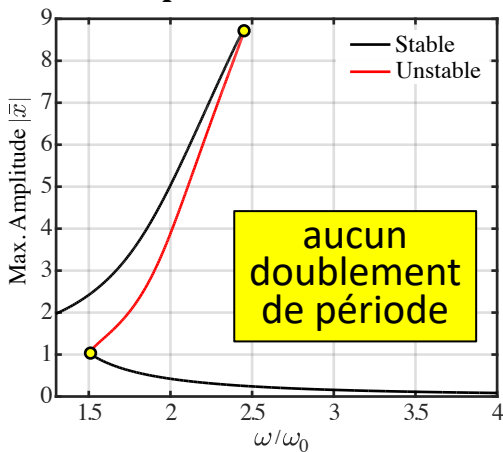
Non-linéarité géométrique des barres minces : force de rappel cubique.

Non-linéarité de contact : force élastique linéaire par morceaux due aux jeux entre ressorts et butée.

Cas **symétrique**

$$j_1 = j_2 = 0.4\text{mm}$$

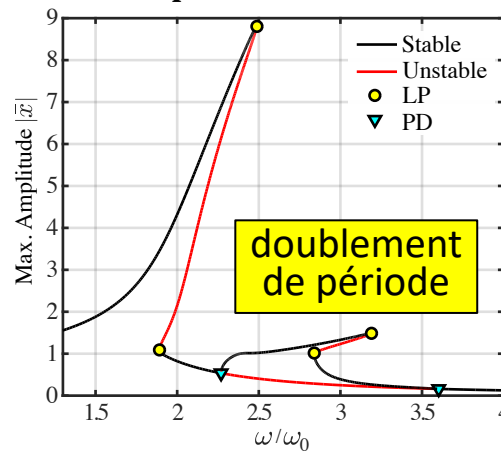
$$\bar{p} = 0.55$$



Cas totalement **asymétrique**

$$j_1 = 0.8\text{mm} \quad j_2 = 0\text{mm}$$

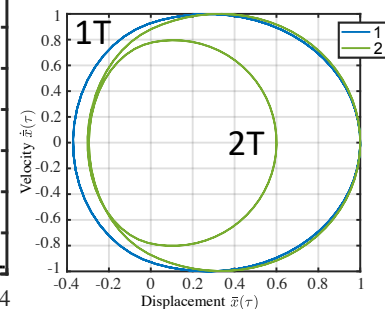
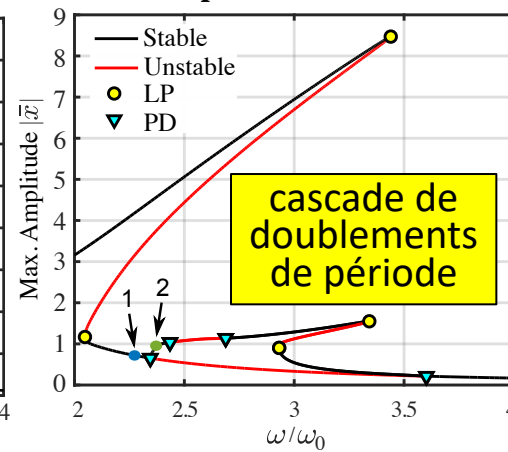
$$\bar{p} = 0.55$$



Cas totalement **asymétrique**

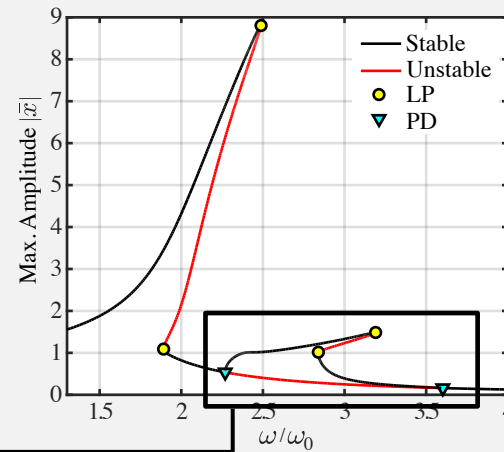
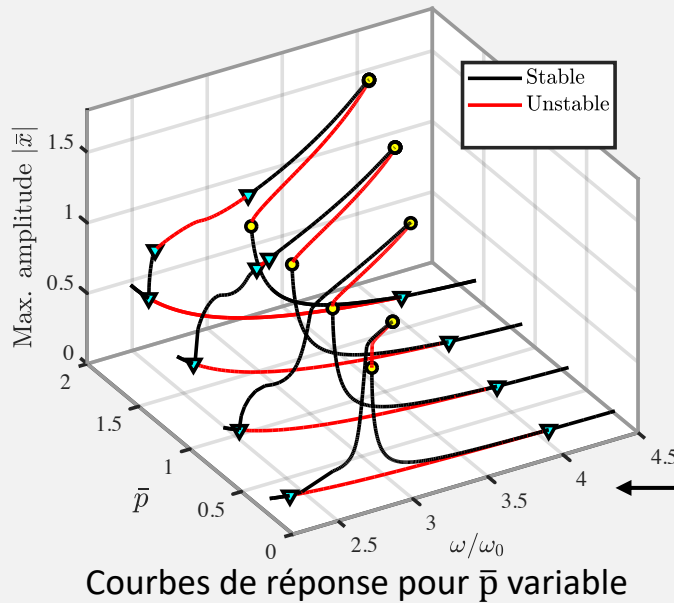
$$j_1 = 0.8\text{mm} \quad j_2 = 0\text{mm}$$

$$\bar{p} = 1.7$$

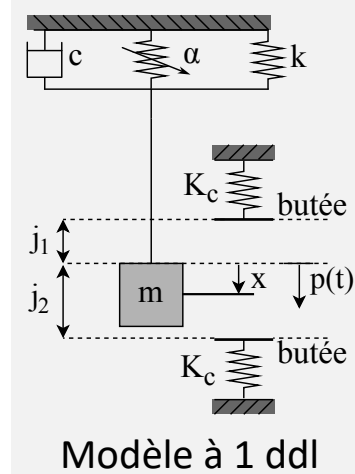


Système KOALA avec jeux et impacts

Cas totalement **asymétrique** $j_1 = 0.8\text{mm}$ $j_2 = 0\text{mm}$



Courbe de réponse pour $\bar{p} = 0.55$



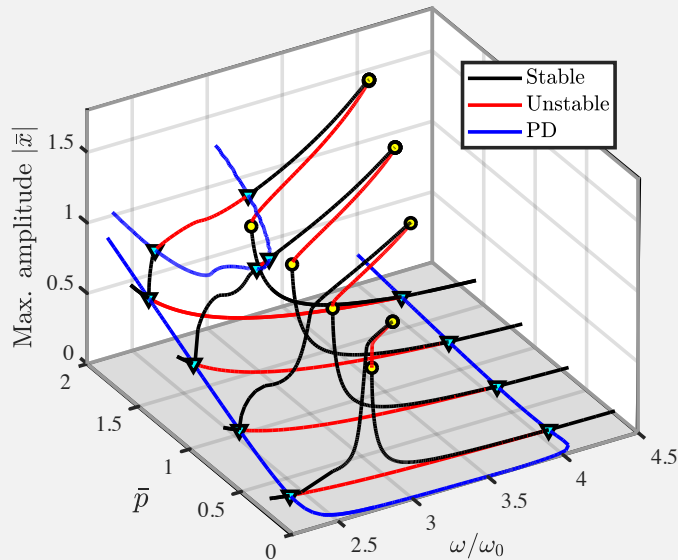
R. Alcorta, S. Baguet, B. Prabel, P. Piteau, and G. Jacquet-Richardet.

Period doubling bifurcation analysis and isolated sub-harmonic resonances in an oscillator with asymmetric clearances.

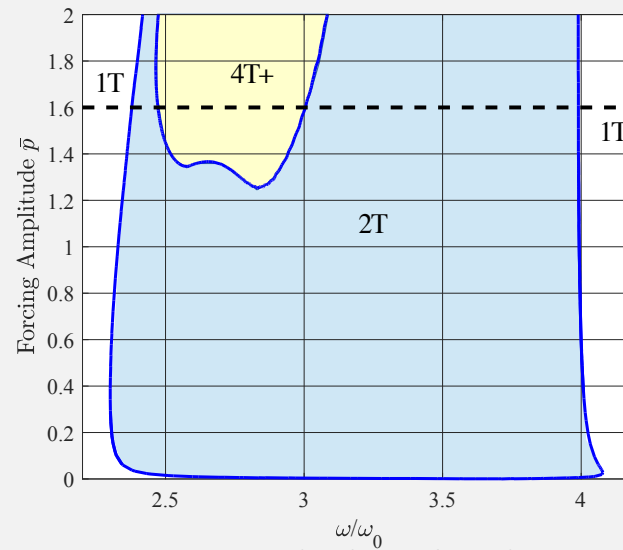
Nonlinear Dynamics, 98(4), 2019. doi: [10.1007/s11071-019-05245-6](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05245-6)

Système KOALA avec jeux et impacts

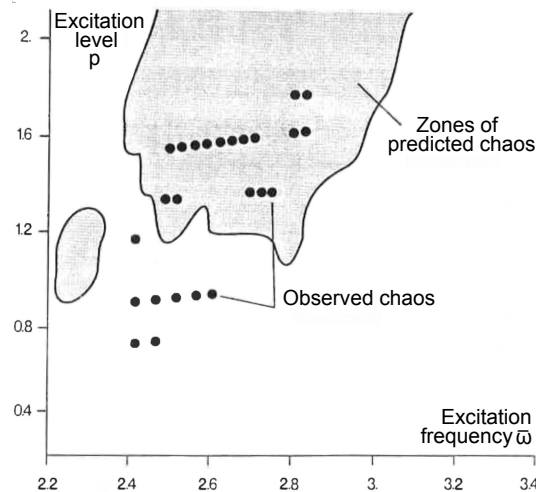
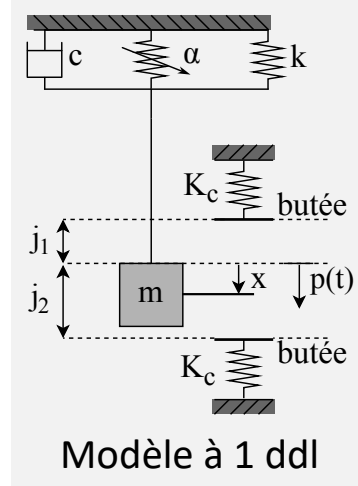
Cas totalement **asymétrique** $j_1 = 0.8\text{mm}$ $j_2 = 0\text{mm}$



Suivi de bifurcations Doublement de Période (PD)



Projection des branches de PD



De Langre et Lebreton (1996)

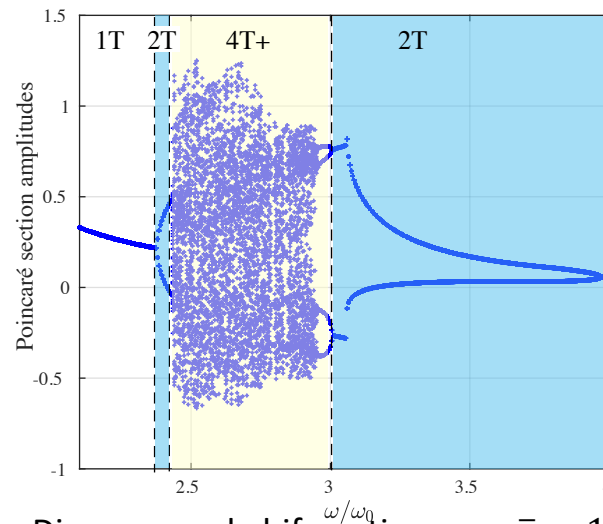
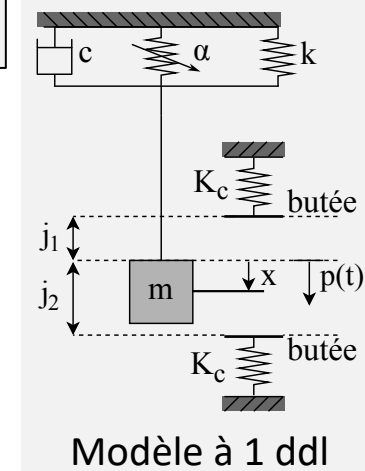
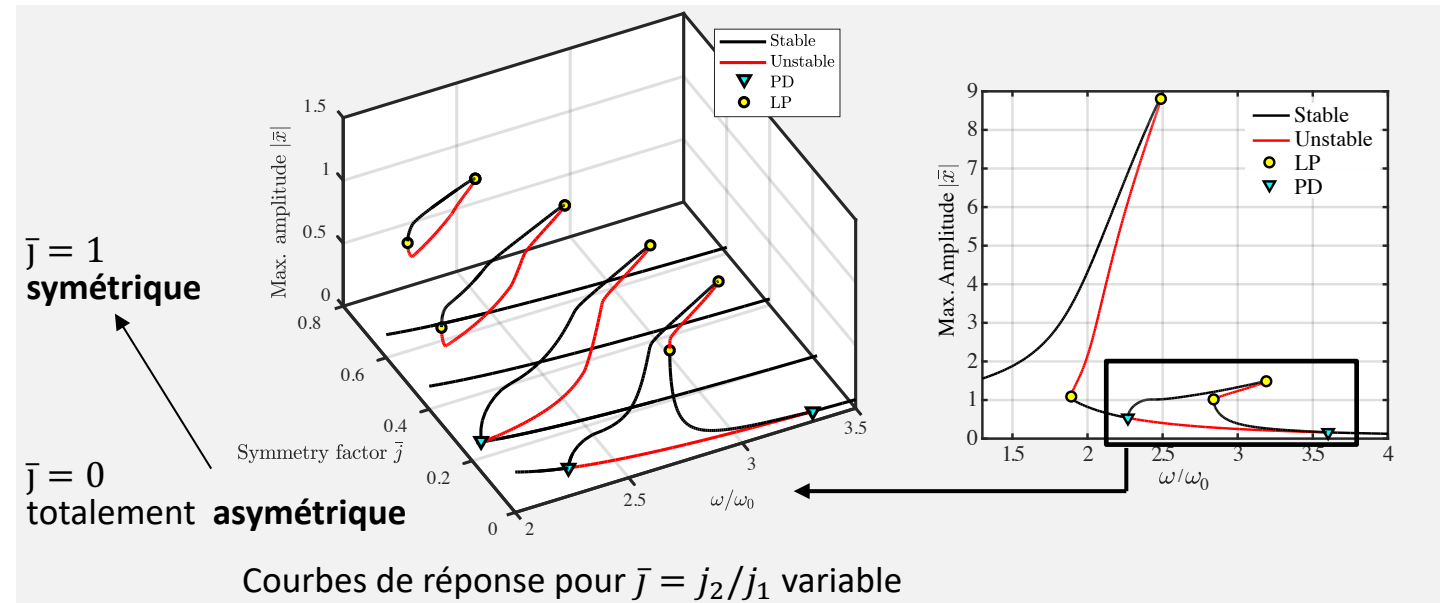


Diagramme de bifurcation pour $\bar{p} = 1.6$

Quel niveau d'asymétrie
 $\bar{j} = j_2/j_1$
 pour voir apparaître les
 doublements de période
 ?

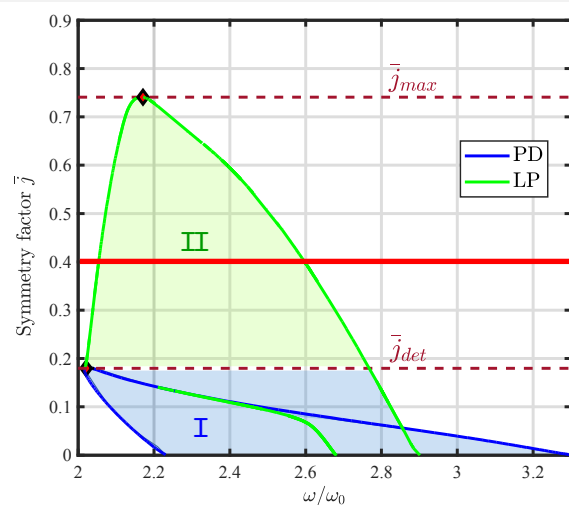
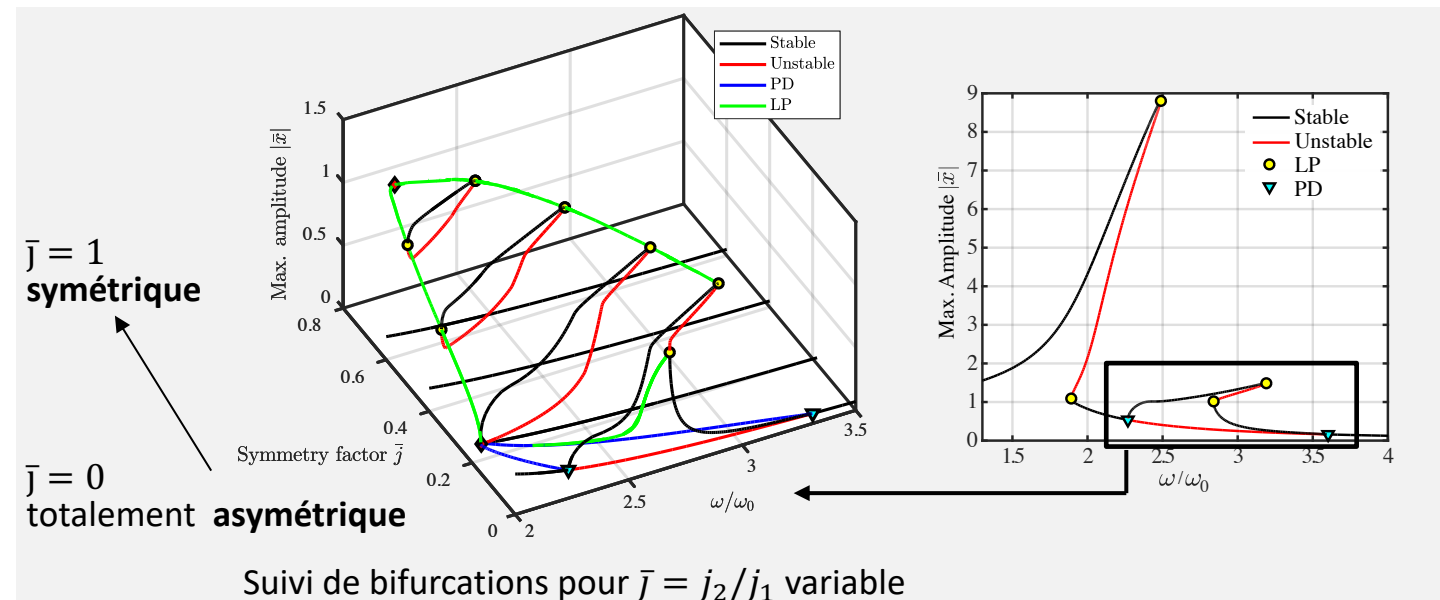
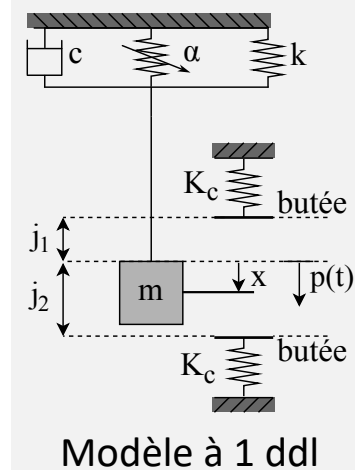
Système KOALA avec jeux et impacts

Quel niveau d'asymétrie $\bar{j} = j_2/j_1$ pour voir apparaître les doubléments de période ?



Système KOALA avec jeux et impacts

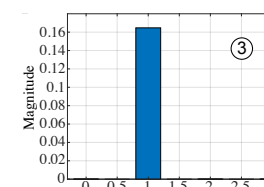
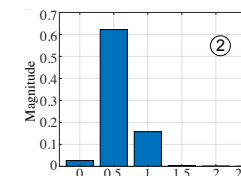
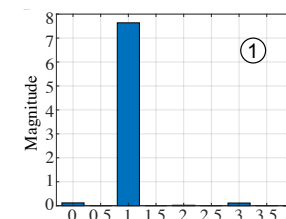
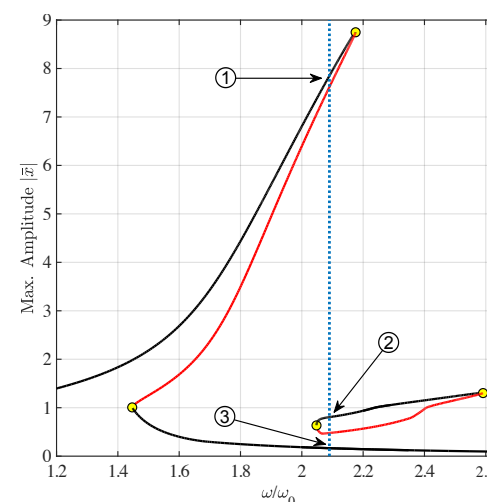
Quel niveau d'asymétrie $\bar{j} = j_2/j_1$ pour voir apparaître les doublages de période ?



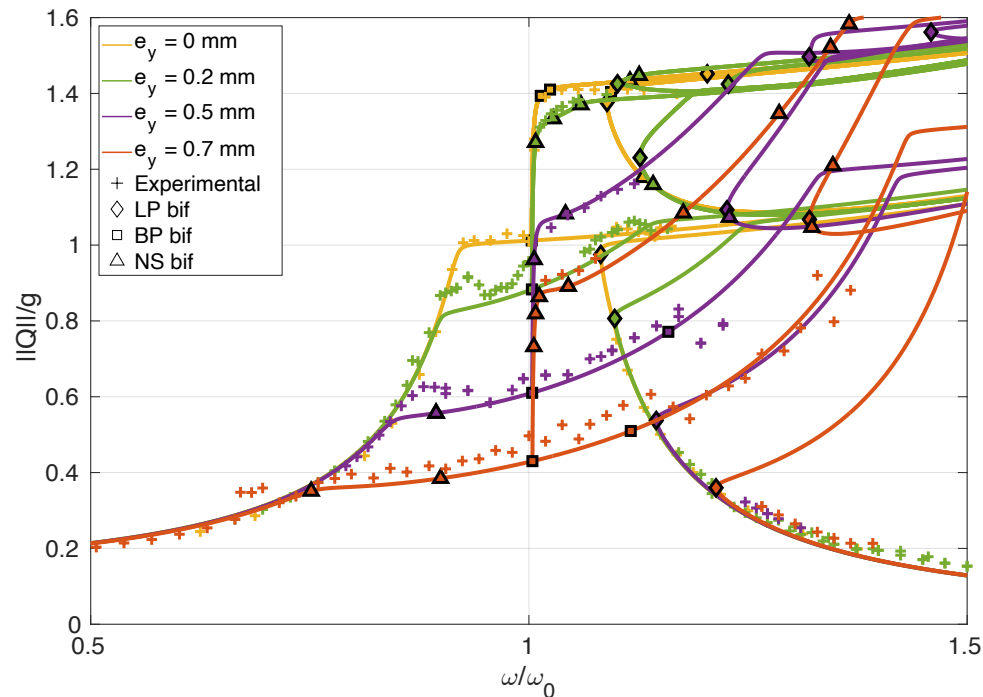
L'isola 2T disparaît

$\bar{j} = 0.4$

La branche 2T se détache



Aide à la compréhension de courbes de réponses expérimentales.



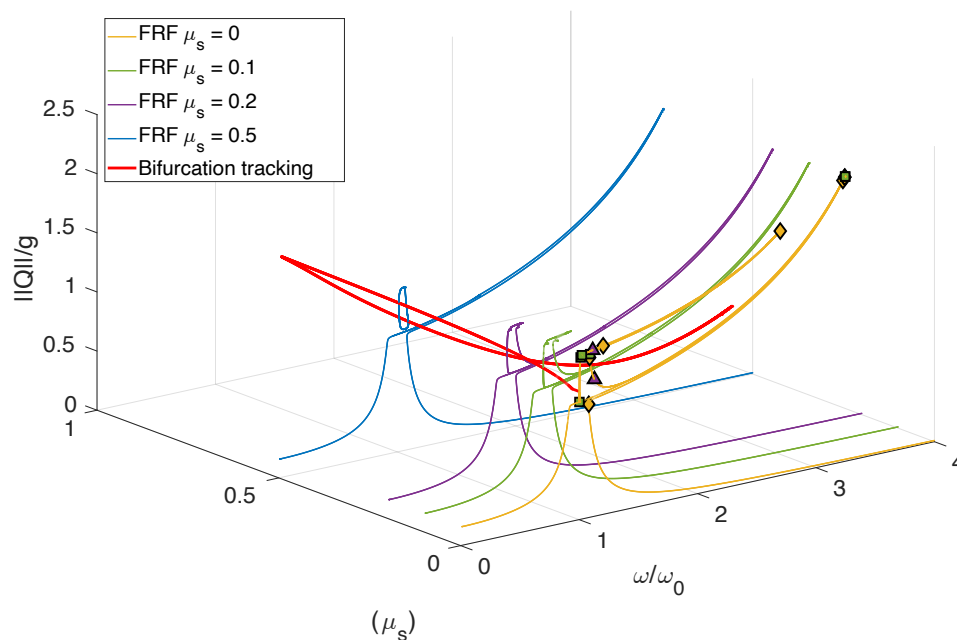
P. Becerra, S. Baguet, B. Prabel, C. Grenat, and R. Dufour.

Influence of symmetry breaking on the multi-stable responses of a vibro-impact system : Experimental and numerical investigation.

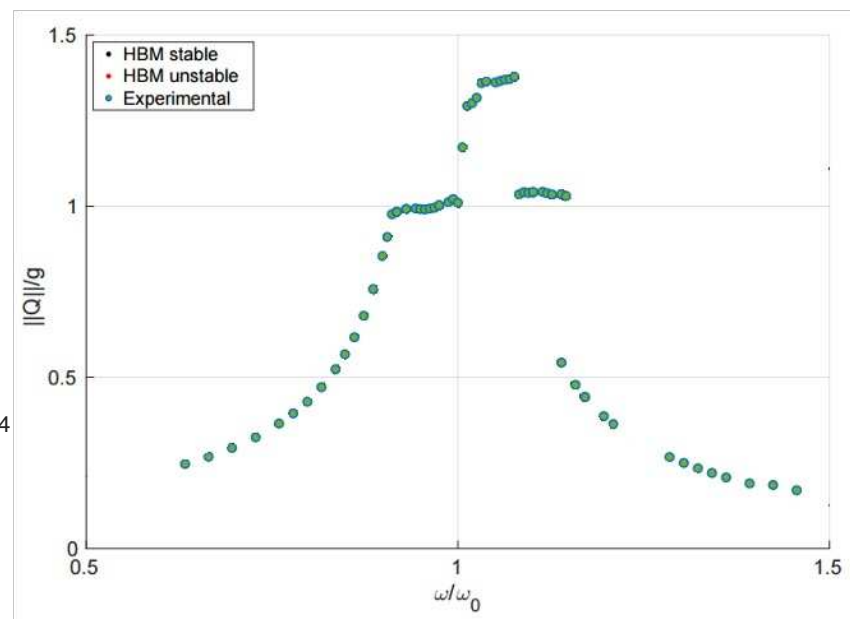
MSSP, 226, 2025. doi: [10.1016/j.ymssp.2025.112327](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112327)

Recalage de paramètre

par comparaison des résultats expérimentaux et du suivi numérique de bifurcations.



Suivi de bifurcations par rapport au coefficient de frottement



Résultats expérimentaux



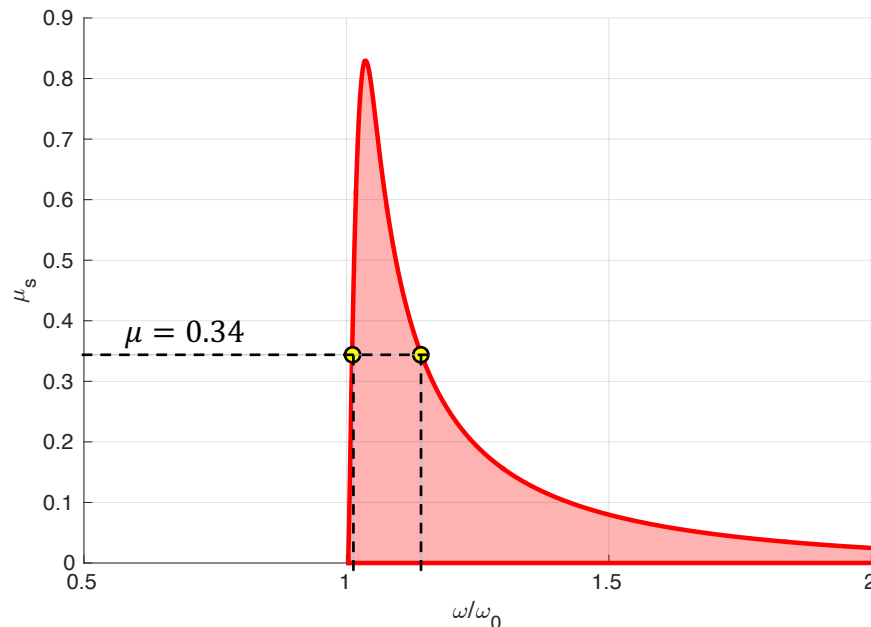
P. Becerra, S. Baguet, B. Prabel, C. Grenat, and R. Dufour.

Influence of symmetry breaking on the multi-stable responses of a vibro-impact system : Experimental and numerical investigation.

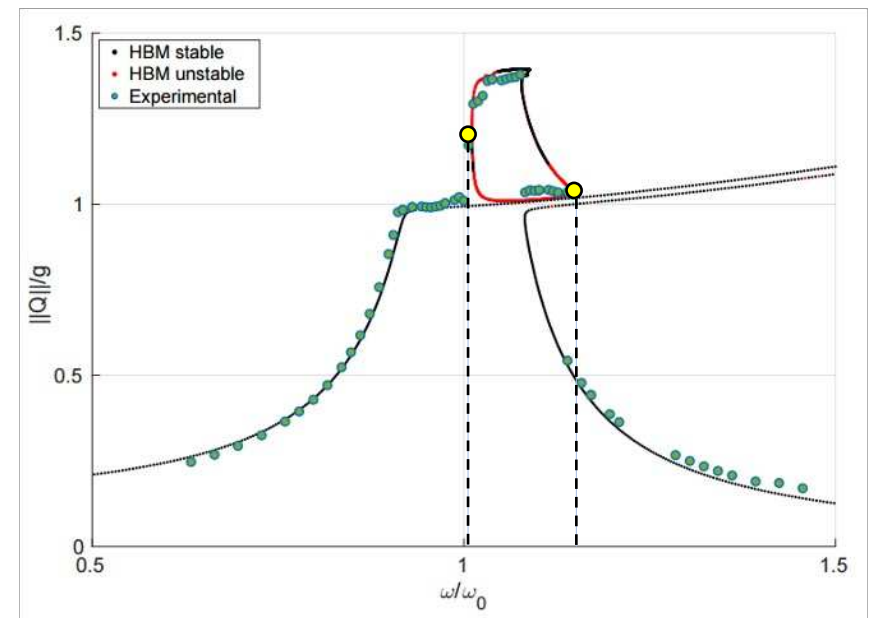
MSSP, 226, 2025. doi: [10.1016/j.ymssp.2025.112327](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112327)

Recalage de paramètre

par comparaison des résultats expérimentaux et du suivi numérique de bifurcations.



Suivi de bifurcations par rapport au coefficient de frottement



Courbe de réponse pour $\mu = 0.34$



P. Becerra, S. Baguet, B. Prabel, C. Grenat, and R. Dufour.

Influence of symmetry breaking on the multi-stable responses of a vibro-impact system : Experimental and numerical investigation.

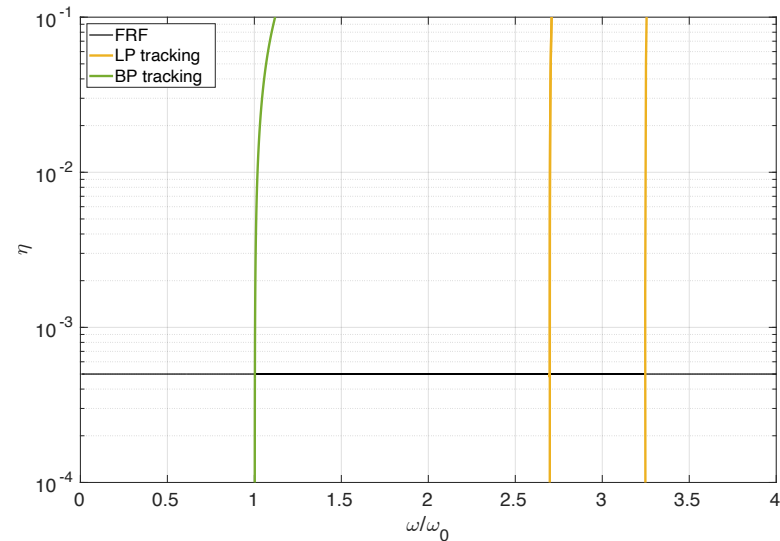
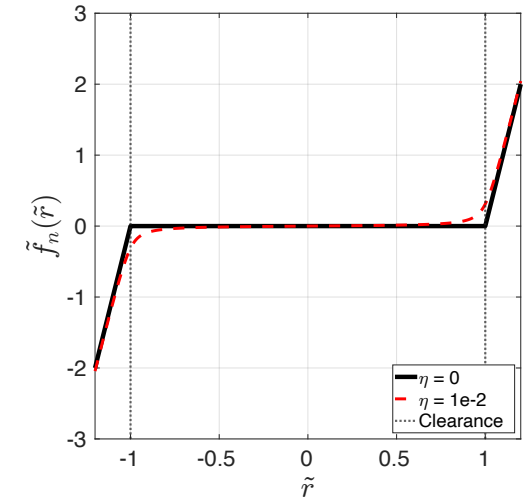
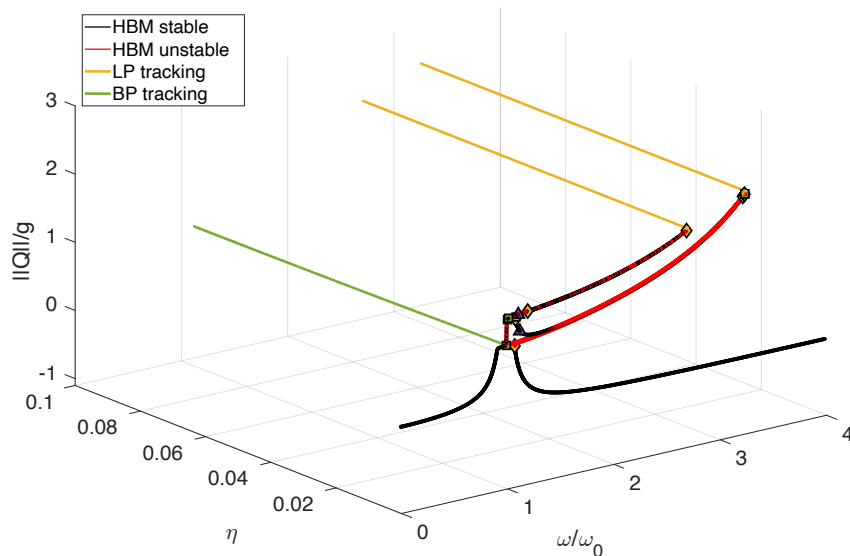
MSSP, 226, 2025. doi: [10.1016/j.ymssp.2025.112327](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112327)

Autres applications du calcul de bifurcations

Influence du coefficient de régularisation dans la loi de contact

Pas de modification des bifurcations jusqu'à une certaine valeur seuil.

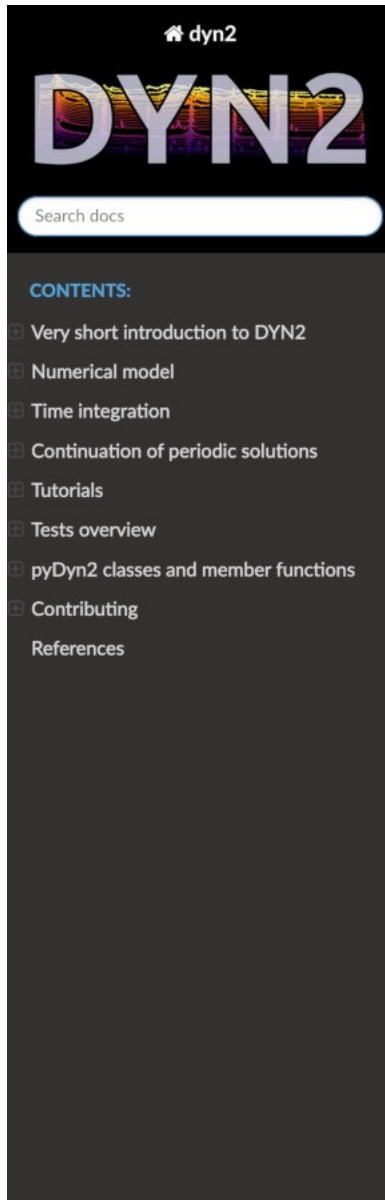
Suivi de bifurcations par rapport au coefficient de régularisation



P. Becerra, S. Baguet, B. Prabel, C. Grenat, and R. Dufour.

Influence of symmetry breaking on the multi-stable responses of a vibro-impact system : Experimental and numerical investigation.

MSSP, 226, 2025. doi: [10.1016/j.ymssp.2025.112327](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112327)



dyn2

DYN2

Search docs

CONTENTS:

- Very short introduction to DYN2
- Numerical model
- Time integration
- Continuation of periodic solutions
- Tutorials
- Tests overview
- pyDyn2 classes and member functions
- Contributing
- References

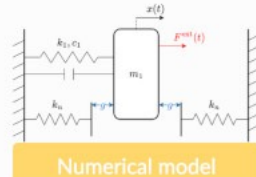
🏠 / DYN2 documentation

[View page source](#)

DYN2

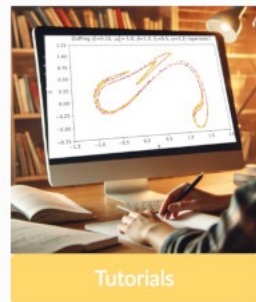
The DYN2 project aims at **solving non-linear vibration problems**.

It provides practical numerical nonlinear models, efficient time integration method, numerical continuation of periodic solution through HBM and bifurcation tracking facilities.



Continuation of
periodic solutions

Time integration



pyDyn2 classes and
member functions

Contributing

[Link to the Gitlab repository.](#)