

Écoulement induit par une membrane vibrant en déformation extrême.

P.-O. Mattei, CNRS-LMA

R. Côte, L. Sabatier

17 octobre 2025, GdR Ex-Modeli

Introduction

Dans le cadre de nos études sur les NESs vibroacoustiques, nous avons utilisé des modèles simplifiés (2-ddl) basés sur des projections de Ritz. Les paramètres des modèles identifiés sur une large plage d'amplitude (k_L , k_{NL} , η_f), étaient quasiment constants.

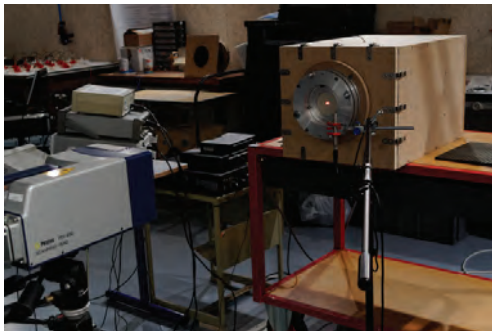
Par contre, dans certains cas, l'amortissement des membranes augmentait fortement avec l'amplitude vibratoire (thèse I. Bouzid)

Et nous ne savons toujours pas comment l'expliquer

Introduction

Comprendre le comportement des membranes sous (très) grandes déformations...

Mesures dédiées plus fines.

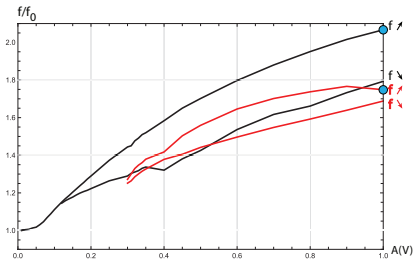


Expériences sur des membranes isolées

Forçage sinusoïdal pur avec balayage en fréquence croissante ou décroissante afin de mesurer la “backbone curve” pour identifier les non-linéarités (rigidité et dissipation).,

Plusieurs “backbones curves” ?

Fréquence du maximum vibratoire de la membrane pour un forçage donné pour des fréquences croissantes et décroissantes.

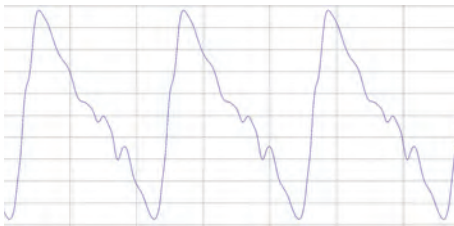


“Backbones curves”. Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm. $f_{lin} = 44$ Hz.
Noir : mode A. Rouge : mode B

Deux différents “modes” de vibration

Plusieurs “backbones curves” ?

Mode A : membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm à 92 Hz ($2,1 \times f_{lin}$) et 1V



Signal temporel de la vitesse vibratoire au centre de la membrane.

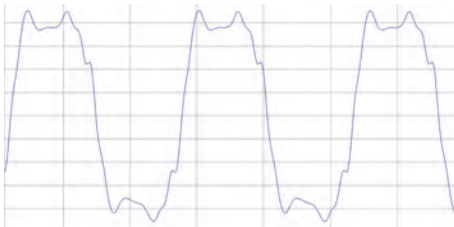
f_h	92	184	276	368	460	644	736
L (dB)	13,5	8,2	1,1	-4,9	-21,4	-10,1	-13,5

Niveaux de la fondamentale et des différents harmoniques.

f_1 et $f_2 = 2 \times f_1$ dominant.

Plusieurs “backbones curves” ?

Mode B : membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm à 78 Hz ($1,7 \times f_{\text{lin}}$) et 1V



Signal temporel au centre de la membrane.

f_h	78	156	234	312	390	468	546
L (dB)	10,6	-21,7	-1,7	-32,2	-11,9	-32,1	-17

Niveaux de la fondamentale et des différents harmoniques.

f_1 et $f_3 = 3 \times f_1$ dominant.

Voulez-vous un peu de “Streaming” ?

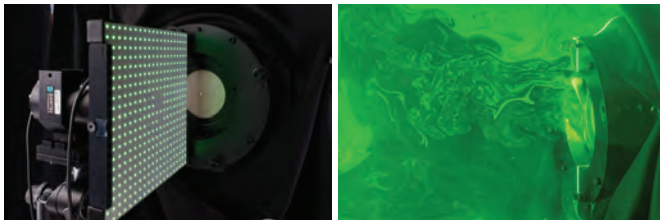
Une observation, littéralement “au doigt mouillé”, semble indiquer la présence d’un écoulement au voisinage immédiat de la membrane lorsque celle-ci vibre fortement.

Explication de l’augmentation de l’amortissement (la membrane pèse 2 g) ?

Mesure PIV rapide (Dantec Dynamics) pour vérifier la présence ou l’absence d’un tel flux.

Mesures en aval d’une membrane de latex de 8 cm de diamètre et de 0,4 mm d’épaisseur dans un plan perpendiculaire à la membrane.

Voulez-vous un peu de "Streaming" ?



Mesure stéréo-PIV rapide de la membrane seule.

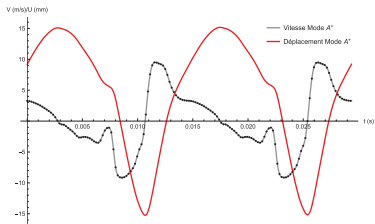
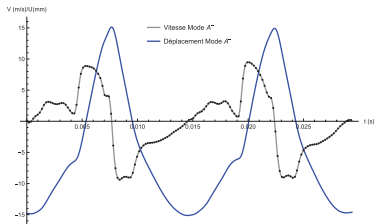
Après l'ensemencement du milieu, entre 2700 et 4000 paires d'images, séparées par $1\mu s$, (50 images par cycle) sont mesurées pendant 2 secondes. On identifie pour chaque paire d'image un champ de vitesse par PIV adaptative (logiciel DantecDynamic) puis on moyenne ces champs (quelques To de données et semaines de calculs)

Influence de la forme du mode vibratoire

Le mode B n'induit (quasiment) pas d'écoulement.

Pour le mode A, deux types de réponses, qui possèdent des allures temporelles opposées, existent. Ces modes nommés A^- et A^+ , sont de même amplitude.

Par exemple pour, une membrane d'épaisseur 0,43 mm à 68 Hz

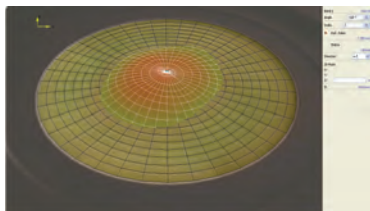
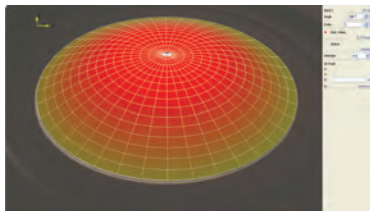


Temporelles du mode A^- (gauche) et du mode A^+ (droite)

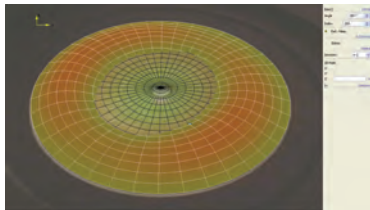
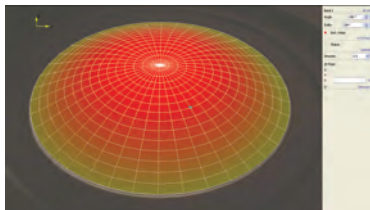
- ▶ vitesse vibratoire $\approx \pm 9,6$ m/s
- ▶ déplacement vibratoire $\approx \pm 15$ mm

Influence de la forme du mode vibratoire

Les modes $A^\pm$ ne diffèrent que par la phase relative des harmoniques paires,



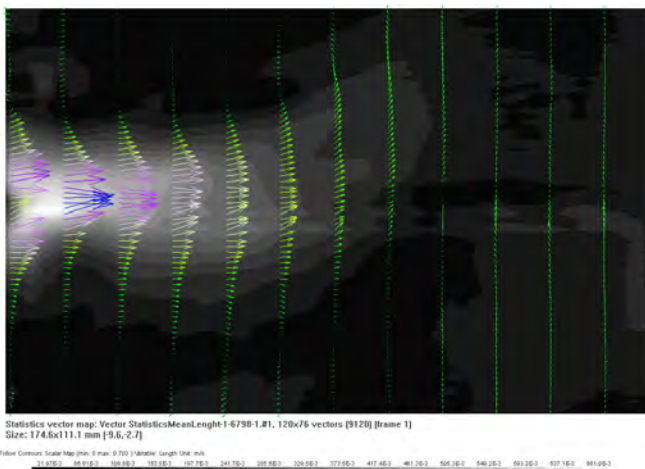
$\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ du mode A^+



$\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ du mode A^-

Influence de la forme du mode vibratoire

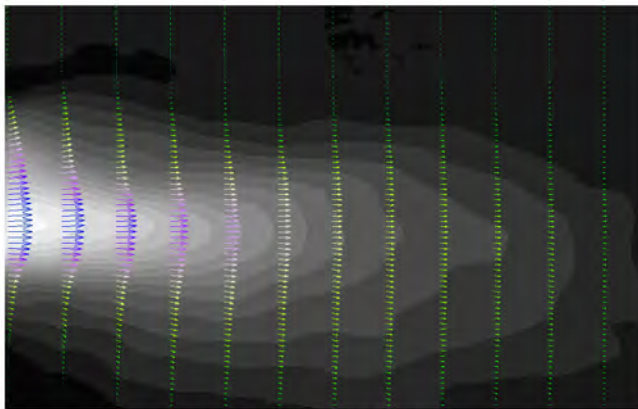
Membrane d'épaisseur 0,43 mm à 68 Hz et vitesse $V_m \approx \pm 9,6$ m/s soit $V_m^{RMS} \approx 5$ m/s. PIV à 3400 fps.



Écoulement moyen sur 2 s induit par le mode A^+ . $V_f^{max} \approx 0,8$ m/s

Influence de la forme du mode vibratoire

Membrane d'épaisseur 0,43 mm à 68 Hz et vitesse $V_m \approx \pm 9,6$ m/s soit $V_m^{RMS} \approx 5$ m/s. PIV à 3400 fps.



Statistics vector map: Vector Statistics Mean Length: 1.6798-1.81, 120x76 vectors (9120) [frame 1]
Size: 174.6x111.1 mm [-9.6,-2.7]

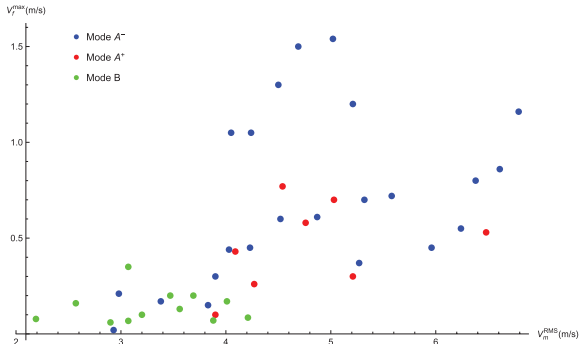
Follow Contours Scalar Map (min: 1.54 Variable: Length Unit: m/s)

48 125.3 344.45.3 348.65.3 358.95.3 403.15.3 429.45.3 435.65.3 471.95.3 516.15.3 514.45.3 1.011 1.707 1.200 1.298 1.400

Écoulement moyen sur 2 s induit par le mode A^- . $V_f^{max} \approx 1,5$ m/s

Estimation de conversion d'énergie

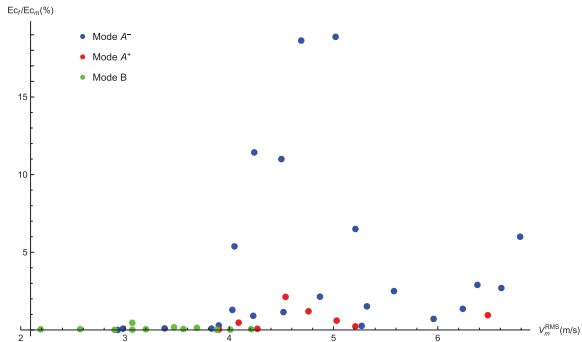
Bilan de 43 mesures



Vitesse moyenne maximale du fluide vs vitesse RMS de la membrane.

Estimation de conversion d'énergie

Bilan de 43 mesures



Ratio des énergies cinétiques fluide/membrane vs vitesse RMS de la membrane.

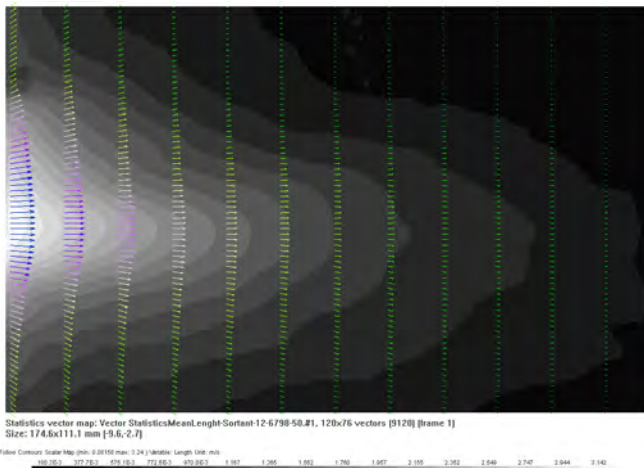
Quelques commentaires

- ▶ L'essentiel du mouvement de la membrane se localise sur premier mode symétrique (1,0). Comment expliquer le passage d'un mode à l'autre ?
- ▶ Mode A
 - ▶ Piloté par des harmoniques symétriques
 - ▶ $f_{02} = 2,3 \times f_{10}$. Résonance 1 : 2 ?
- ▶ Mode B
 - ▶ Piloté par des harmoniques non symétriques
 - ▶ $f_{2,1} = 2,14 \times f_{10}$. Résonance 1 : 2 ?
- ▶ Des mesures plus fines par sinus synchronisé (méthode d'A. Novak) montrent que l'on peut observer jusqu'à 4 "backbones".
- ▶ Pas de lien évident entre le pompage d'énergie et ces modes vibratoires : le pompage est "porté" par le fondamental.
- ▶ Le mode A^- favorise nettement l'écoulement, avec une conversion d'énergie cinétique vibratoire/fluide qui peut atteindre près de 20 % et qui peut expliquer une dissipation apparente importante.
- ▶ Il reste encore à comprendre comment cet écoulement se développe si intensément dans certains cas.

Questions ?

Détails de l'écoulement

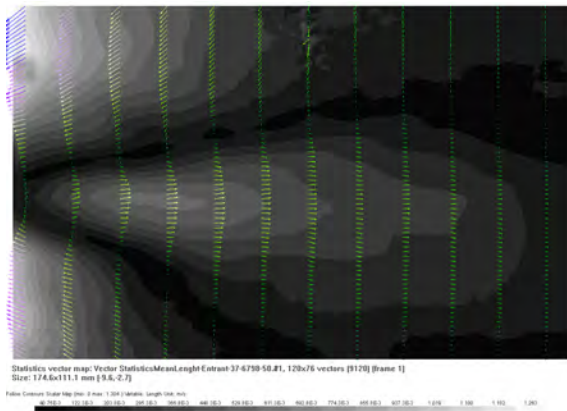
Mode A⁻, vitesse vibratoire $\pm 9,6$ m/s



Moyenne du maximum de l'écoulement sortant sur 136 périodes (vitesse max 3,1 m/s)

Détails de l'écoulement

Mode A⁻, vitesse vibratoire $\pm 9,6$ m/s



Moyenne du maximum de l'écoulement entrant sur 136 périodes (vitesse max 1,2 m/s)

Modèle simplifié de "backbone curve"

l'équation différentielle qui gouverne la dynamique non amortie d'un oscillateur non-linéaire de Duffing s'écrit :

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x(t)^3 = 0$$

On procède à un équilibrage harmonique en supposant $x(t) = A \cos(\omega t)$, comme $x^3(t) = \frac{A^3}{4} (3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$, on obtient

$$-\omega^2 A \cos(\omega t) + \omega_0^2 A \cos(\omega t) + \alpha A^3 \frac{1}{4} (3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)) = 0$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) A \cos(\omega t) + \alpha A^3 \frac{3}{4} \cos(\omega t) \approx 0$$

Soit

$$\omega^2(A) \approx \omega_0^2 + \frac{3}{4} \alpha A^2$$

Pour un oscillateur de Duffing généralisé (à raideur impaire de type $x^{2n+1}(t)$), l'EH donne

$$\omega^2(A) \approx \omega_0^2 + \sum_{n=1}^N \alpha_n A^{2n} \Rightarrow \frac{f(A)}{f_0} = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_n A^{2n}}, \alpha_0 = 1$$

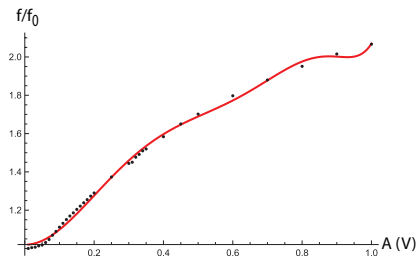
“Backbone A”

Pour une non-linéarité de raideur de type Duffing, on cherche les α_n tels que

$$\frac{f^{N_r}(A)}{f_0} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n A^{2n} \right)^{1/2}$$

qui minimisent $\varepsilon_{N_r} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{m=1}^{M_{mes}} \left(\frac{|f^{N_r}(A_m) - f_m|}{f_m} \right)^2}$ l'erreur de reconstruction RMS.

Pour la “backbone” du mode A pour f croissant, on obtient pour $N_r = 5$ et $\varepsilon_{N_r} = 1,4\%$



Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.

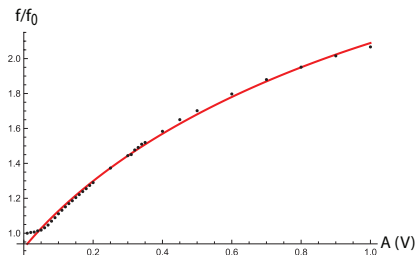
“Backbones Curves” Mesurée (noir) identifiée (rouge).

“Backbone A”

Pour une approximation polynômiale

$$\frac{f^{N_r}(A)}{f_0} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n A^n \right)^{1/2}$$

Pour la “backbone” du mode A pour f croissant, on obtient pour $N_r = 2$ et $\varepsilon_{N_r} = 1,7\%$



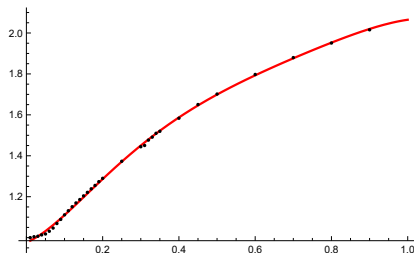
Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.
“Backbones Curves” Mesurée (noir) identifiée (rouge).

“Backbone A”

Pour une approximation polynômiale

$$\frac{f^{N_r}(A)}{f_0} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n A^n \right)^{1/2}$$

Pour la “backbone” du mode A pour f croissant, on identifie pour $N_r = 5$ et $\varepsilon_{N_r} = 0,6\%$



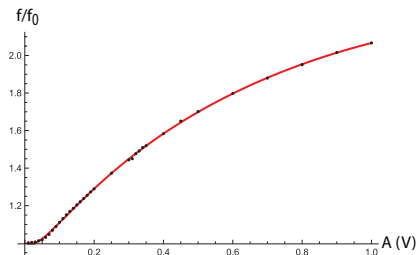
Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.
“Backbones Curves” Mesurée (noir) identifiée (rouge).

“Backbone A”

Pour une approximation en puissances fractionnaires

$$\frac{f^{N_r}(A)}{f_0} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n A^{n/2} \right)^{1/2}$$

Pour la “backbone” du mode A pour f croissant, on identifie pour $N_r = 3$ et $\varepsilon_{N_r} = 0,4\%$



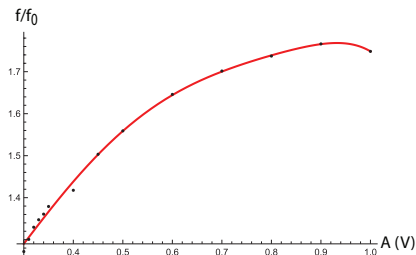
Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.
“Backbones Curves” Mesurée (noir) identifiée (rouge).

“Backbone B”

Pour une approximation de type Duffing

$$\frac{f^{N_r}(A)}{f_0} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n A^{2n} \right)^{1/2}$$

Pour la “backbone” du mode B pour f croissant, on obtient pour $N_r = 4$ et $\varepsilon_{N_r} = 0,7\%$



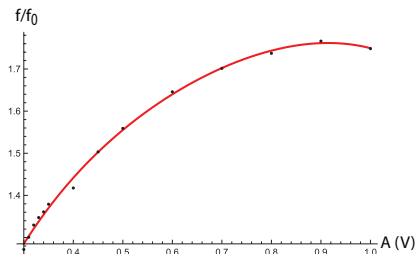
Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.
“Backbones Curves” Mesurée (noir) identifiée (rouge).

“Backbone B”

Pour une approximation polynômiale

$$\frac{f^{N_r}(A)}{f_0} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n A^n \right)^{1/2}$$

Pour la “backbone” du mode B pour f croissant, on identifie pour $N_r = 4$ et $\varepsilon_{N_r} = 0,7\%$



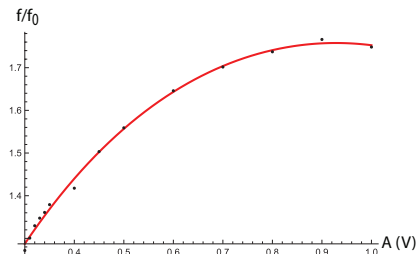
Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.
“Backbones Curves” Mesurée (noir) identifiée (rouge).

“Backbone B”

Pour une approximation en puissances fractionnaires

$$\frac{f^{N_r}(A)}{f_0} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n A^{n/2} \right)^{1/2}$$

Pour la “backbone” du mode A pour f croissant, on identifie pour $N_r = 3$ et $\varepsilon_{N_r} = 0,7\%$



Membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.
“Backbones Curves” Mesurée (noir) identifiée (rouge).