

Limites de validité pour la méthode de paramétrisation de variétés invariantes : critères pratiques pour les systèmes vibrants

André de F. Stabile^(a), Aurélien Grolet^(b), Alessandra Vizzaccaro^(c), Cyril Touzé^(a)

^(a)IMSIA - CNRS - EDF - CEA, ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris

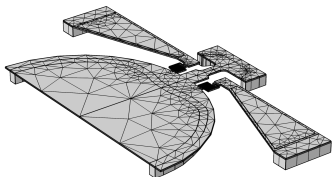
^(b)LISPEN, Arts et Métiers Sciences et Technologies

^(c)College of Engineering, Mathematics and Physical Sciences, University of Exeter

Journées du GdR EX-MODELI
Octobre 2025

Méthode de paramétrisation de variétés invariantes

- Technique non linéaire de réduction de modèle.

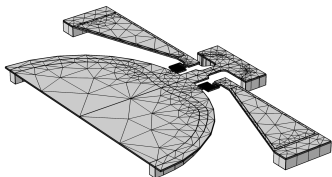


$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{F}(t)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{Réduction: } \mathbf{y} \in \mathbb{C}^D, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^d \\ \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{z}) \end{array} \quad d \ll D$$

Méthode de paramétrisation de variétés invariantes

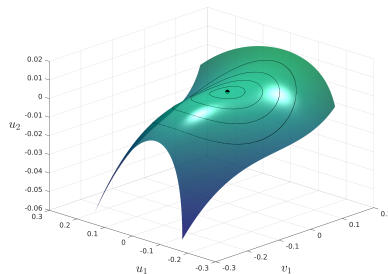
- ▶ Technique non linéaire de réduction de modèle.
- ▶ Modes non linéaires : variétés invariantes définies mathématiquement comme LSMs/SSMs [Shaw and Pierre (1991); Haller and Ponsioen (2016)].



$$B\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{F}(t)$$

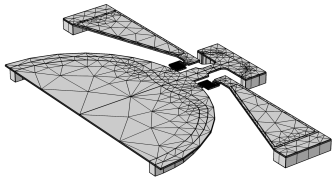
$\downarrow$ Réduction: $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^D, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$
 $d \ll D$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{z})$$

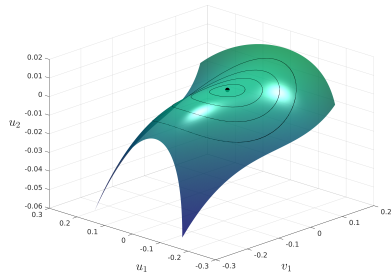


Méthode de paramétrisation de variétés invariantes

- ▶ Technique non linéaire de réduction de modèle.
- ▶ Modes non linéaires : variétés invariantes définies mathématiquement comme LSMs/SSMs [Shaw and Pierre (1991); Haller and Ponsioen (2016)].



$$\begin{aligned} B\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{F}(t) \\ &\downarrow \text{Réduction: } \mathbf{y} \in \mathbb{C}^D, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^d, d \ll D \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{z}) \end{aligned}$$



- ▶ Développements asymptotiques autour d'un point fixe : $\mathbf{W}(\mathbf{z}) = \sum [\mathbf{W}(\mathbf{z})]_p, \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum [\mathbf{f}(\mathbf{z})]_p$

Limites de validité pour la méthode de paramétrisation



Limites de validité pour la méthode de paramétrisation



- Approche typique : comparaison avec un modèle complet.

Limites de validité pour la méthode de paramétrisation



- ▶ Approche typique : comparaison avec un modèle complet.
- ▶ Nécessité de critères permettant la détermination des limites de validité sans avoir recours au modèle complet.

Limites de validité pour la méthode de paramétrisation



- ▶ Approche typique : comparaison avec un modèle complet.
- ▶ Nécessité de critères permettant la détermination des limites de validité sans avoir recours au modèle complet.
- ▶ Accent sur critères pratiques, appliqués aux systèmes mécaniques.

Méthode de paramétrisation - Panorama

On considère systèmes dynamiques de la forme

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Méthode de paramétrisation - Panorama

On considère systèmes dynamiques de la forme

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Injectant

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{z}),$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}),$$

on retrouve l'équation d'invariance

$$\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{W}(\mathbf{z})\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{z}) + \mathbf{Q}(\mathbf{W}(\mathbf{z}), \mathbf{W}(\mathbf{z})),$$

qui permet de déterminer les coefficients des expansions asymptotiques de $\mathbf{W}$ et $\mathbf{f}$.

Limites de validité - Équation d'invariance

On impose que le résidu de l'équation d'invariance soit plus petit qu'une tolérance spécifiée :

$$\frac{\|\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{W}(\mathbf{z})\mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{z}) - \mathbf{Q}(\mathbf{W}(\mathbf{z}), \mathbf{W}(\mathbf{z}))\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{W}^{(1,1)}\|} < \varepsilon,$$

Limites de validité - Équation d'invariance

On impose que le résidu de l'équation d'invariance soit plus petit qu'une tolérance spécifiée :

$$\frac{\|\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{W}(\mathbf{z})\mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{z}) - \mathbf{Q}(\mathbf{W}(\mathbf{z}), \mathbf{W}(\mathbf{z}))\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{W}^{(1,1)}\|} < \varepsilon,$$

Simplification possible pour un seul mode maître : idée basée dans la méthode asymptotique numérique [Cochelin (1994)]. Avec $z_{1,2} = \frac{\rho}{2}e^{\pm i\theta}$, il est possible de retrouver

$$\rho = 2 \left(\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{W}^{(1,1)}\|}{\|\mathbf{R}^{o+1}\|} \varepsilon \right)^{\frac{1}{o+1}}.$$

Limites de validité - Singularité de l'opérateur homologique

Critère initialement proposé pour la forme normale [\[Lamarque et al. \(2012\)\]](#). On définit l'opérateur d'invariance :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{W}(\mathbf{z})$$

Limites de validité - Singularité de l'opérateur homologique

Critère initialement proposé pour la forme normale [Lamarque et al. (2012)]. On définit l'opérateur d'invariance :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{W}(\mathbf{z})$$

On cherche ses singularités :

- Si $d = D$: $\det \mathbf{H} = 0$.

Limites de validité - Singularité de l'opérateur homologique

Critère initialement proposé pour la forme normale [Lamarque et al. (2012)]. On définit l'opérateur d'invariance :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{W}(\mathbf{z})$$

On cherche ses singularités :

- ▶ Si $d = D$: $\det \mathbf{H} = 0$.
- ▶ Si $d < D$: Il n'est plus possible de calculer le déterminant de $\mathbf{H}$.

Limites de validité - Singularité de l'opérateur homologique

Critère initialement proposé pour la forme normale [Lamarque et al. (2012)]. On définit l'opérateur d'invariance :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{W}(\mathbf{z})$$

On cherche ses singularités :

- ▶ Si $d = D$: $\det \mathbf{H} = 0$.
- ▶ Si $d < D$: Il n'est plus possible de calculer le déterminant de $\mathbf{H}$.
 - ▶ Sélectionner une sous-matrice ; ou

Limites de validité - Singularité de l'opérateur homologique

Critère initialement proposé pour la forme normale [Lamarque et al. (2012)]. On définit l'opérateur d'invariance :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{W}(\mathbf{z})$$

On cherche ses singularités :

- ▶ Si $d = D$: $\det \mathbf{H} = 0$.
- ▶ Si $d < D$: Il n'est plus possible de calculer le déterminant de $\mathbf{H}$.
 - ▶ Sélectionner une sous-matrice ; ou
 - ▶ Calculer la décomposition en valeurs singuliers.

Limites de validité - Singularité de l'opérateur homologique

Critère initialement proposé pour la forme normale [Lamarque et al. (2012)]. On définit l'opérateur d'invariance :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{W}(\mathbf{z})$$

On cherche ses singularités :

- ▶ Si $d = D$: $\det \mathbf{H} = 0$.
- ▶ Si $d < D$: Il n'est plus possible de calculer le déterminant de $\mathbf{H}$.
 - ▶ Sélectionner une sous-matrice ; ou
 - ▶ Calculer la décomposition en valeurs singuliers.

Pour les cas forcés : il suffit de considérer la sous-matrice associée à la partie autonome.

Limites de validité - Séries

Critère adapté au cas d'un seul mode maître. Avec une forme polaire des variables normales :

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^o \mathbf{f}_p(\theta) \rho^p,$$
$$\mathbf{W}(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^o \mathbf{W}_p(\theta) \rho^p.$$

Limites de validité - Séries

Critère adapté au cas d'un seul mode maître. Avec une forme polaire des variables normales :

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^o \mathbf{f}_p(\theta) \rho^p,$$
$$\mathbf{W}(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^o \mathbf{W}_p(\theta) \rho^p.$$

Application de règles de convergence de séries à une des composantes scalaires :

$$\rho_C = \lim_{p \rightarrow \infty} a_p^{-1/d},$$
$$\rho_A = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_p}{a_{p+1}}.$$

Traitement de la dépendance en θ (et ϕ pour le cas forcé) : minimum pour différentes valeurs.

Exemple

On considère l'oscillateur à deux DDLs décrit par :

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 + h_{111}^1 u_1^3 + 3h_{111}^2 u_1^2 u_2 &= \kappa \cos \Omega t, \\ \ddot{u}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 + h_{111}^2 u_1^3 &= 0,\end{aligned}$$

et on s'intéresse d'abord au cas conservatif et sans forçage.

Exemple

On considère l'oscillateur à deux DDLs décrit par :

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 + h_{111}^1 u_1^3 + 3h_{111}^2 u_1^2 u_2 &= \kappa \cos \Omega t, \\ \ddot{u}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 + h_{111}^2 u_1^3 &= 0,\end{aligned}$$

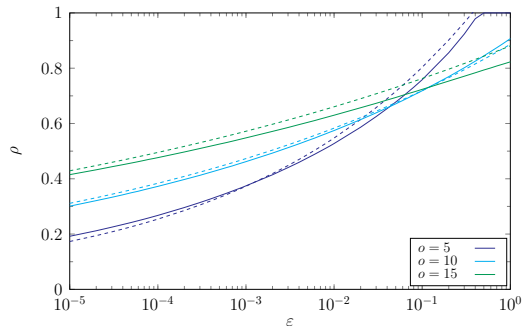
et on s'intéresse d'abord au cas conservatif et sans forçage. On fixe

$$h_{111}^1 = h_{111}^2 = \omega_1 = 1,$$

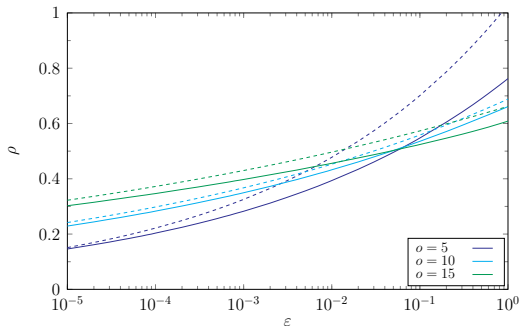
et deux valeurs de ω_2 :

$$\omega_2 = 1.57 \quad \text{et} \quad \omega_2 = 0.637.$$

Exemple - Équation d'invariance

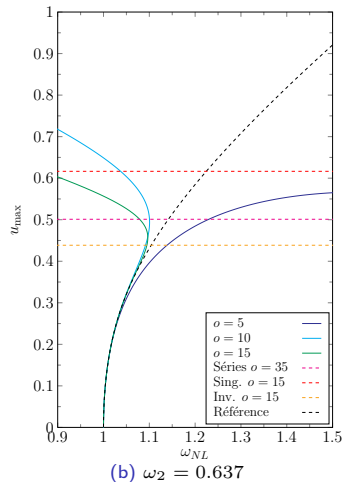
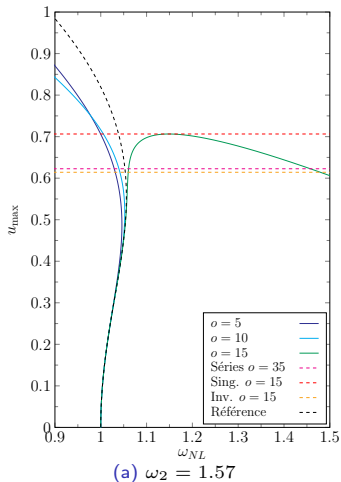


(a) $\omega_2 = 1.57$



(b) $\omega_2 = 0.637$

Exemple - Backbones



Systèmes forcés

- ▶ Tous les critères présentés sont appliqués après le calcul du modèle réduit, pour le valider.

Systèmes forcés

- ▶ Tous les critères présentés sont appliqués après le calcul du modèle réduit, pour le valider.
- ▶ Détermination de κ *a priori* : expressions analytiques pour des cas de résonance spécifiques.

Oscillateur de Duffing - Cas conservatif

Oscillateur de Duffing :

$$\ddot{u} + 2\xi_1\omega_1 u + \omega_1 u + hu^3 = \kappa \cos \Omega t.$$

Oscillateur de Duffing - Cas conservatif

Oscillateur de Duffing :

$$\ddot{u} + 2\xi_1\omega_1 u + \omega_1 u + hu^3 = \kappa \cos \Omega t.$$

Pour le cas **conservatif et en vibration libre**, jusqu'à l'ordre 9 :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\omega_1 z_1 + i\frac{3h}{2\omega_1} z_1^2 z_2 - i\frac{51h^2}{2^4\omega_1^3} z_1^3 z_2^2 + i\frac{1419h^3}{2^7\omega_1^5} z_1^4 z_2^3 - i\frac{47505h^4}{2^{10}\omega_1^7} z_1^5 z_2^4 \\ u &= z_1 + z_2 + \frac{h}{8\omega_1^2} z_1^3 - \frac{3h}{4\omega_1^2} z_1^2 z_2 - \frac{3h}{4\omega_1^2} z_1 z_2^2 + \frac{h}{8\omega_1^2} z_2^3 + \frac{h^2}{64\omega_1^4} z_1^5 + \dots \end{aligned}$$

Oscillateur de Duffing - Cas conservatif

Oscillateur de Duffing :

$$\ddot{u} + 2\xi_1\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u + hu^3 = \kappa \cos \Omega t.$$

Pour le cas **conservatif et en vibration libre**, jusqu'à l'ordre 9 :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\omega_1 z_1 + i\frac{3h}{2\omega_1} z_1^2 z_2 - i\frac{51h^2}{2^4\omega_1^3} z_1^3 z_2^2 + i\frac{1419h^3}{2^7\omega_1^5} z_1^4 z_2^3 - i\frac{47505h^4}{2^{10}\omega_1^7} z_1^5 z_2^4 \\ u &= z_1 + z_2 + \frac{h}{8\omega_1^2} z_1^3 - \frac{3h}{4\omega_1^2} z_1^2 z_2 - \frac{3h}{4\omega_1^2} z_1 z_2^2 + \frac{h}{8\omega_1^2} z_2^3 + \frac{h^2}{64\omega_1^4} z_1^5 + \dots \end{aligned}$$

La backbone et l'amplitude du déplacement sont **obtenus analytiquement** :

$$\begin{aligned} \omega_{NL} &= \omega_1 \left(1 + \frac{3h}{2^3\omega_1^2} \rho^2 - \frac{51h^2}{2^8\omega_1^4} \rho^4 + \frac{1419h^3}{2^{13}\omega_1^6} \rho^6 - \frac{47505h^4}{2^{18}\omega_1^8} \rho^8 \right), \\ u_{\max} &= \rho \left(1 - \frac{5h}{2^5\omega_1^2} \rho^2 + \frac{25h^2}{2^8\omega_1^4} \rho^4 - \frac{2781h^3}{2^{15}\omega_1^6} \rho^6 + \frac{90493h^4}{2^{20}\omega_1^8} \rho^8 \right). \end{aligned}$$

Oscillateur de Duffing - Résonance primaire - $\Omega \approx \omega_1$

La dynamique réduite au **troisième ordre** est

$$\dot{z}_1 = f_1 z_1 + f_2 z_1^2 z_2 + f_3 z_3 + f_4 z_1^2 z_4 + f_5 z_1 z_2 z_3 + f_6 z_1 z_3 z_4 + f_7 z_2 z_3^2 + f_8 z_3^2 z_4,$$

Oscillateur de Duffing - Résonance primaire - $\Omega \approx \omega_1$

La dynamique réduite au **troisième ordre** est

$$\dot{z}_1 = f_1 z_1 + f_2 z_1^2 z_2 + f_3 z_3 + f_4 z_1^2 z_4 + f_5 z_1 z_2 z_3 + f_6 z_1 z_3 z_4 + f_7 z_2 z_3^2 + f_8 z_3^2 z_4,$$

Avec κ, ξ_1 d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\rho\Omega = \rho\omega_1 + \rho^3 \frac{3h}{8\omega_1} \pm \frac{9h\rho^2 - 16\omega_1^2}{3h\rho^2 - 16\omega_1^2} \sqrt{\left(\frac{3h\rho^2 - 16\omega_1^2}{32\omega_1^3} \kappa\right)^2 - \rho^2 \xi_1^2 \omega_1^2}.$$

Oscillateur de Duffing - Résonance primaire - $\Omega \approx \omega_1$

La dynamique réduite au **troisième ordre** est

$$\dot{z}_1 = f_1 z_1 + f_2 z_1^2 z_2 + f_3 z_3 + f_4 z_1^2 z_4 + f_5 z_1 z_2 z_3 + f_6 z_1 z_3 z_4 + f_7 z_2 z_3^2 + f_8 z_3^2 z_4,$$

Avec κ, ξ_1 d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\rho\Omega = \rho\omega_1 + \rho^3 \frac{3h}{8\omega_1} \pm \frac{9h\rho^2 - 16\omega_1^2}{3h\rho^2 - 16\omega_1^2} \sqrt{\left(\frac{3h\rho^2 - 16\omega_1^2}{32\omega_1^3} \kappa\right)^2 - \rho^2 \xi_1^2 \omega_1^2}.$$

Avec de plus h d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\Omega = \omega_1 + \rho^2 \frac{3h}{8\omega_1} \pm \sqrt{\frac{\rho^2 \kappa^2}{4\omega_1^2} - \xi_1^2 \omega_1^2}.$$

[A. de F. Stabile, C. Touzé and A. Vizzaccaro : Normal form analysis of nonlinear oscillator equations with automated arbitrary order expansions, Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics (JTCAM) 13234, 2025.]

Systèmes forcés - Suite

- ▶ Tous les critères présentés sont appliqués après le calcul du modèle réduit, pour le valider.
- ▶ Détermination de κ *a priori* : expressions analytiques pour des cas de résonance spécifiques.

Systèmes forcés - Suite

- ▶ Tous les critères présentés sont appliqués après le calcul du modèle réduit, pour le valider.
- ▶ Détermination de κ *a priori* : expressions analytiques pour des cas de résonance spécifiques.
- ▶ Pour la résonance primaire :

$$\dot{z}_1 = f_1 z_1 + f_2 z_1^2 z_2 + f_3 z_3, \quad (1)$$

avec $f_3 = (c_3^R + ic_3^I)\kappa$.

Systèmes forcés - Suite

- ▶ Tous les critères présentés sont appliqués après le calcul du modèle réduit, pour le valider.
- ▶ Détermination de κ *a priori* : expressions analytiques pour des cas de résonance spécifiques.
- ▶ Pour la résonance primaire :

$$\dot{z}_1 = f_1 z_1 + f_2 z_1^2 z_2 + f_3 z_3, \quad (1)$$

avec $f_3 = (c_3^R + ic_3^I)\kappa$. Si $f_3^R \neq 0$, on a

$$\kappa = \frac{2f_1^R \rho + f_2^R \frac{\rho^3}{2}}{4c_3^R \sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad (2)$$

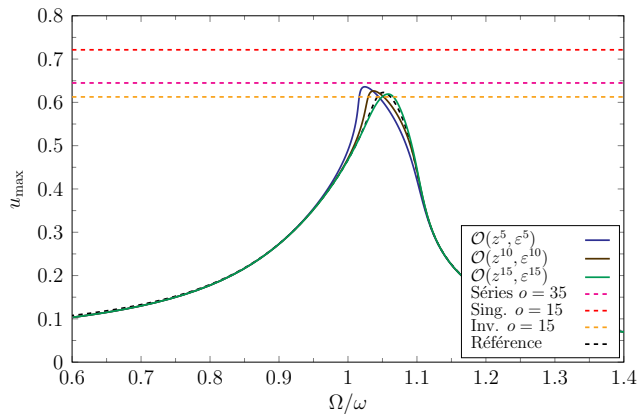
avec $\alpha = f_3^I / f_3^R$, alors que si $f_3^I \neq 0$, on trouve

$$\kappa = \frac{2f_1^R \rho + f_2^R \frac{\rho^3}{2}}{4c_3^I \sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (3)$$

avec $\beta = f_3^R / f_3^I$.

Exemple - Système forcé

- $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$, $\omega_2 = 1.57$ et $\kappa = 0.07$.



Récapitulatif

- ▶ Les trois critères ensemble permettent de déterminer une zone de perte de convergence.

Récapitulatif

- ▶ Les trois critères ensemble permettent de déterminer une zone de perte de convergence.
- ▶ Le critère d'invariance semble le plus robuste, et $\varepsilon = 1\%$ a mené à des bons résultats.

Récapitulatif

- ▶ Les trois critères ensemble permettent de déterminer une zone de perte de convergence.
- ▶ Le critère d'invariance semble le plus robuste, et $\varepsilon = 1\%$ a mené à des bons résultats.
- ▶ La simplification du critère d'invariance est facile à calculer et assez précise.

Récapitulatif

- ▶ Les trois critères ensemble permettent de déterminer une zone de perte de convergence.
- ▶ Le critère d'invariance semble le plus robuste, et $\varepsilon = 1\%$ a mené à des bons résultats.
- ▶ La simplification du critère d'invariance est facile à calculer et assez précise.
- ▶ Les critères de singularité et des séries fournissent une borne supérieure pour les résultats.

Récapitulatif

- ▶ Les trois critères ensemble permettent de déterminer une zone de perte de convergence.
- ▶ Le critère d'invariance semble le plus robuste, et $\varepsilon = 1\%$ a mené à des bons résultats.
- ▶ La simplification du critère d'invariance est facile à calculer et assez précise.
- ▶ Les critères de singularité et des séries fournissent une borne supérieure pour les résultats.
- ▶ La procédure pour déterminer l'amplitude du forçage fonctionne bien.

MERCI
DE VOTRE ATTENTION
andre.de-figueiredo-stabile@ensta-paris.fr



References I

- B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & Structures*, 53(5) :1181–1192, 1994. ISSN 0045-7949. doi : [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)90165-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)90165-1). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794994901651>.
- G. Haller and S. Ponsioen. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds : existence, uniqueness and use in model reduction. *Nonlinear Dynamics*, 86(3) :1493–1534, 2016.
- C. H. Lamarque, C. Touzé, and O. Thomas. An upper bound for validity limits of asymptotic analytical approaches based on normal form theory. *Nonlinear Dynamics*, 70(3) :1931–1949, 2012.
- S. W. Shaw and C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991.