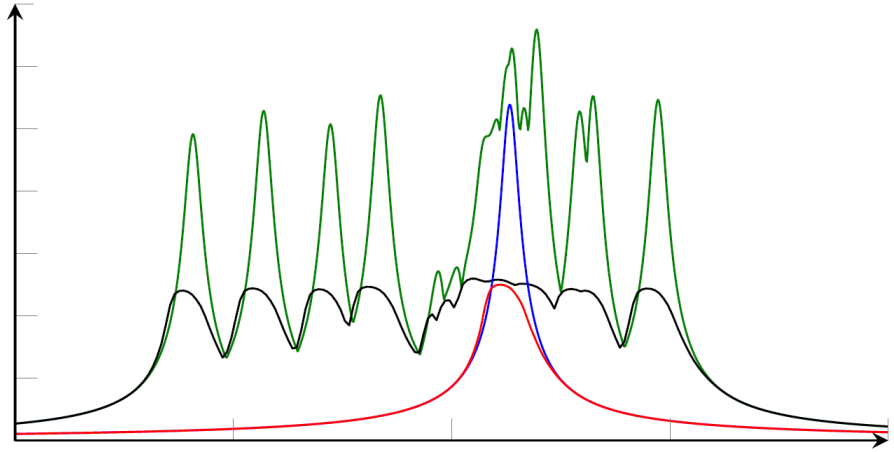
Méthode de synthèse modale pour les systèmes non-linéaires : applications aux contacts frottants et limites de l'approche Craig-Bampton

Samuel QUAEGEBEUR



ÉCOLE CENTRALE LYON

LTDS Tribologie et Dynamique des Systèmes UMR 5513

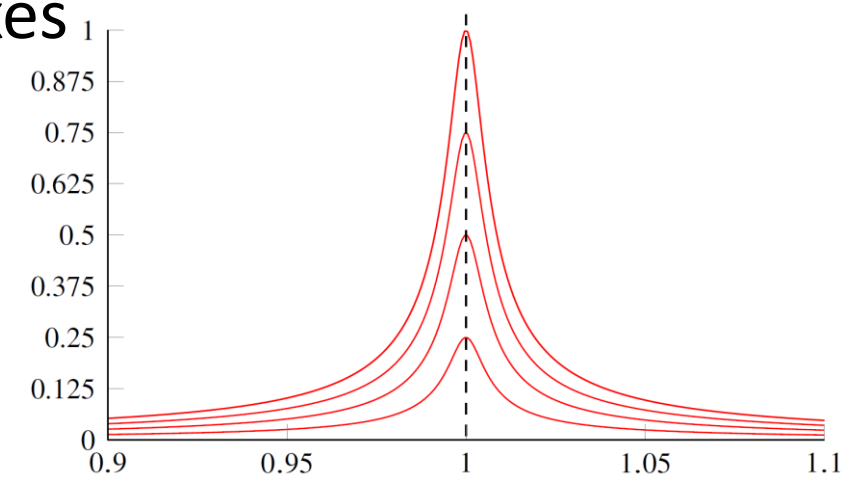
Contexte

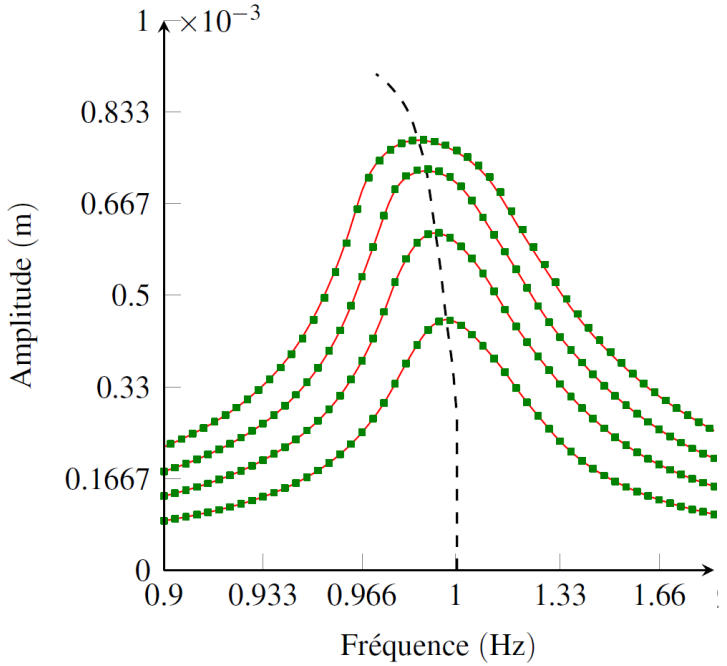
- Prédire la réponse dynamique de structures complexes
  - Modélisation avec la méthode des éléments finis

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}_{\text{ext}}$$

  - Complexité numérique $O\left(N_{\text{ddl}}^3\right)$
  - Calcul modal pour obtenir (ω, Φ)
  - Synthèse modale $\mathbf{x} = \Phi\mathbf{q}$ avec $N_{\text{q}} \ll N_{\text{ddl}}$

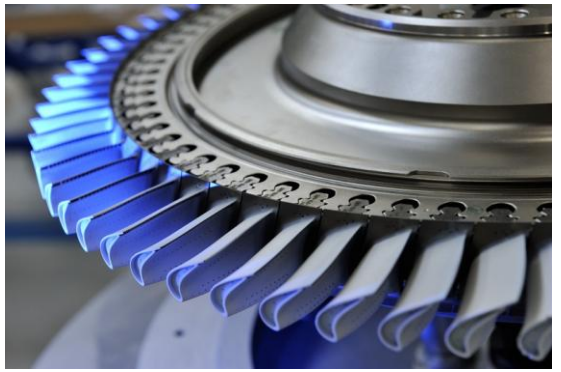
  - Qu'en est-il pour un système non-linéaire ?
  - Calcul du mode non-linéaire
  - Synthèse modale $\mathbf{x} = \phi_1(|q|)q$ avec $N_{\text{q}} = 1$





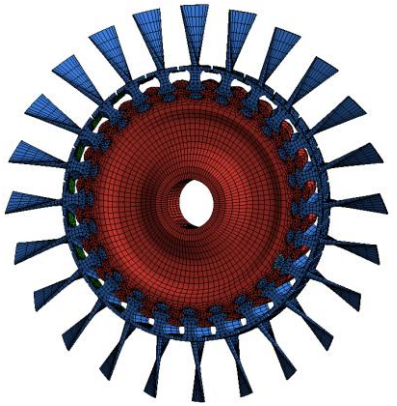
Contexte

- Prédire la réponse dynamique de structures complexes
  - Modélisation avec la méthode des éléments finis
  - Assemblage de plusieurs structures
  - Taille des systèmes ~10-100 millions d'inconnues
  - →Besoin de stratégies numériques précises et rapides
  - Potentielles présences de zones non-linéaires
  - →Besoin de stratégies représentant une dynamique complexe



https://medialibrary.safran-group.com/index_fr.html

FEM



Sommaire

- Principe de la réduction de Craig-Bampton
- Son utilisation dans le cadre
  - Sous-structuration
  - Réduction pour de la dynamique non-linéaire
- Craig-Bampton non-linéaire
- Conclusion
- Limitations

Principe de la réduction de Craig-Bampton

- But : réduire un sous-ensemble de nœuds
  - Nœuds dépendants (esclaves) → à réduire
  - Nœuds référents (maîtres) → à conserver

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{dr} \\ \mathbf{K}_{rd} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{dd} & \mathbf{M}_{dr} \\ \mathbf{M}_{rd} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

- Réduction via
  - Réduction statique (sans forces d'inertie)

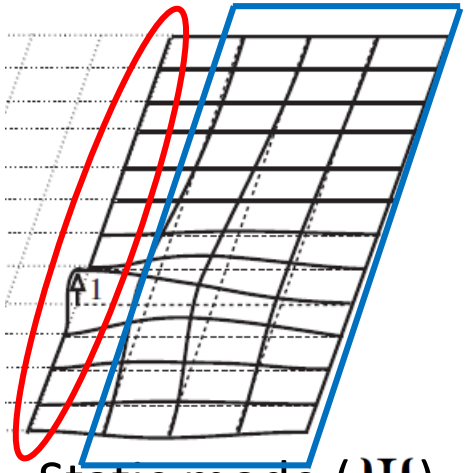
$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{dr}\mathbf{u}_r = -\Psi\mathbf{u}_r$$

  - Réduction modale (en considérant les nœuds référents encastrés)

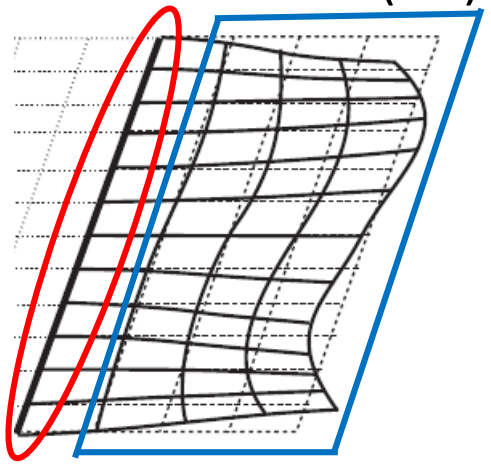
$$\left(\mathbf{K}_{dd} - \omega_d^2\mathbf{M}_{dd}\right)\mathbf{u}_d = \mathbf{0}$$

→

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix}$$



Static mode (Ψ)

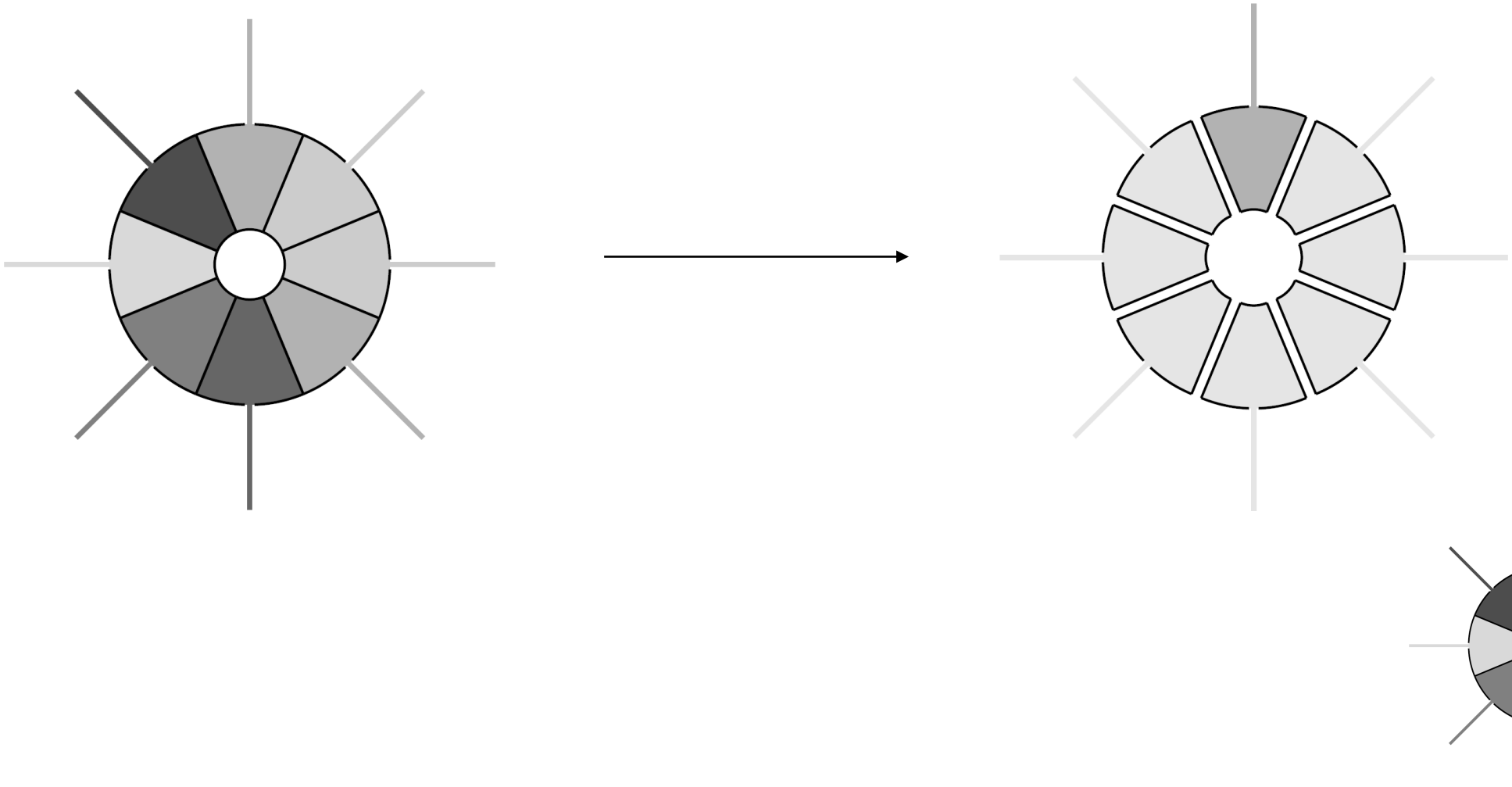


Vibration mode (Φ)

(Géradin and Rixen, 2015)

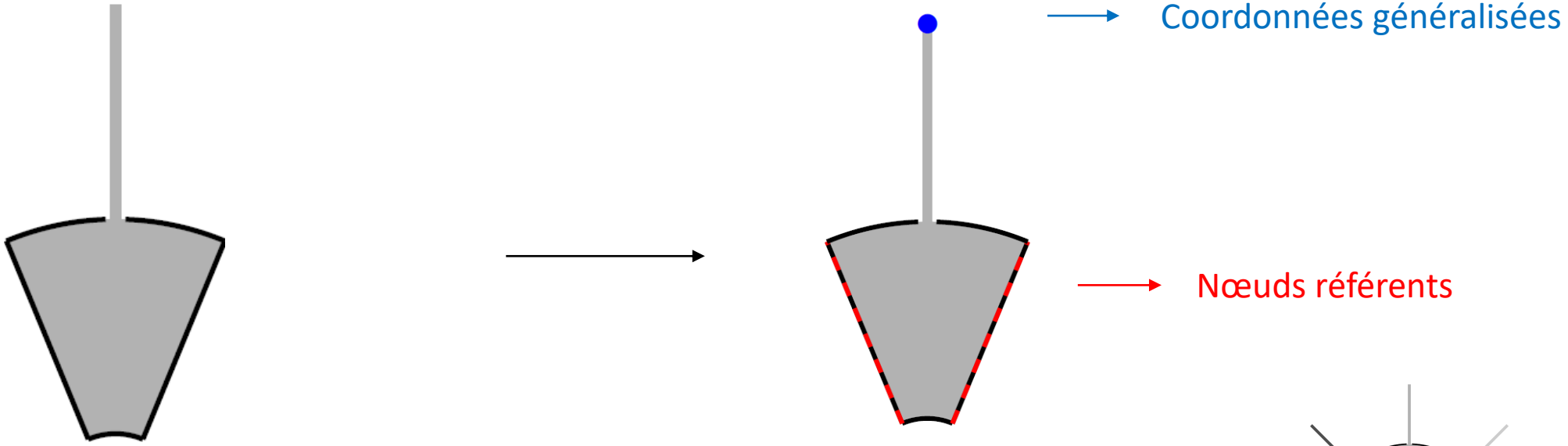
Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (1/2)

- Dynamique linéaire : méthode de sous structuration
  - Division de la structure en N sous-structures



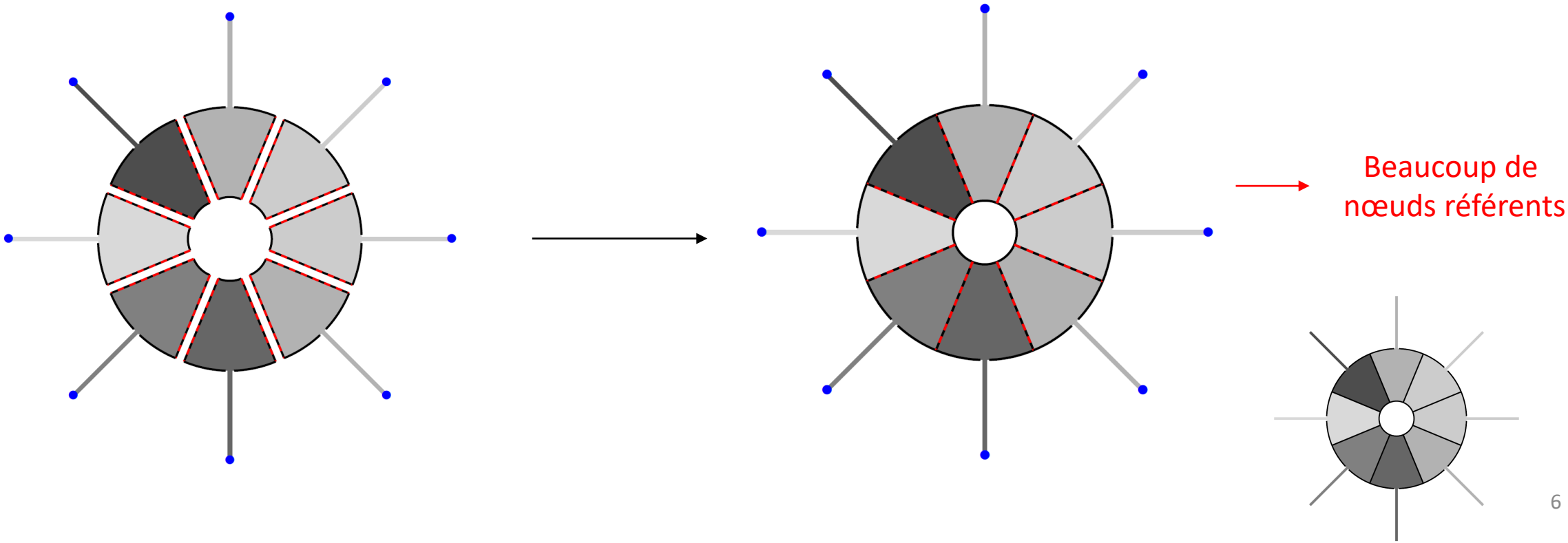
Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (1/2)

- Dynamique linéaire : méthode de sous structuration
  - Division de la structure en N sous-structures
  - Réduction de chaque sous-structure avec l'approche de Craig-Bampton



Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (1/2)

- Dynamique linéaire : méthode de sous structuration
  - Division de la structure en N sous-structures
  - Réduction de chaque sous-structure avec l'approche de Craig-Bampton
  - Assemblage des sous-structures

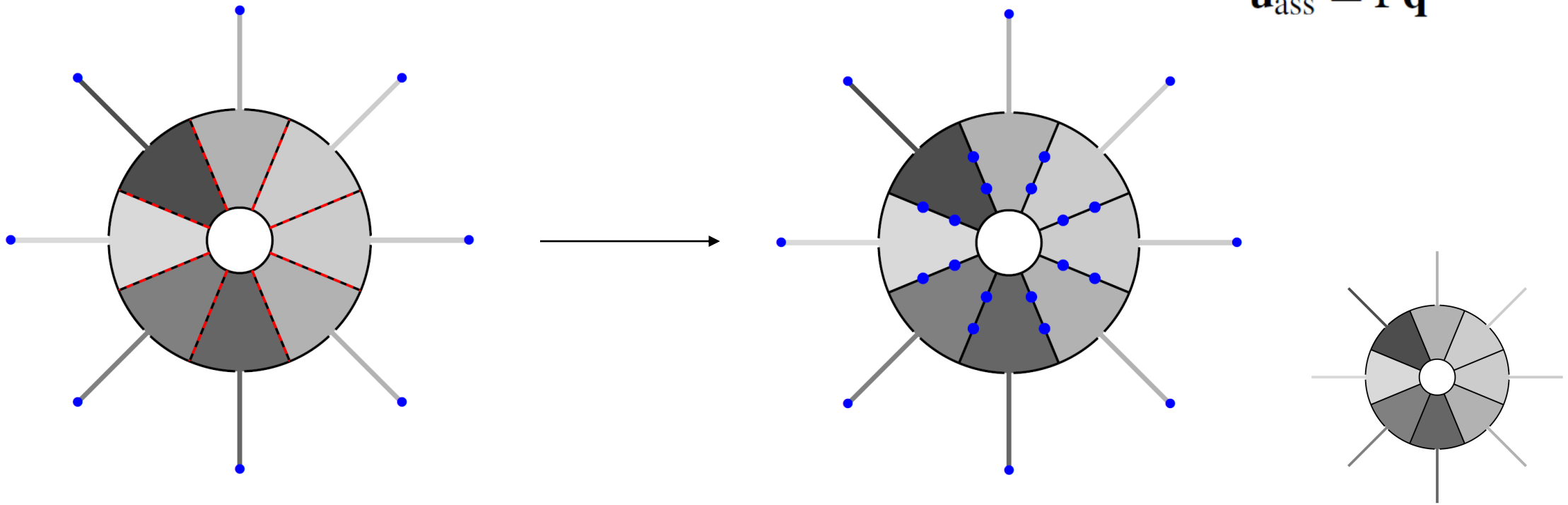


Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (1/2)

- Dynamique linéaire : méthode de sous structuration
  - Division de la structure en N sous-structures
  - Réduction de chaque sous-structure avec l'approche de Craig-Bampton
  - Assemblage des sous-structures
  - Réduction des nœuds d'assemblage (modes d'interfaces)

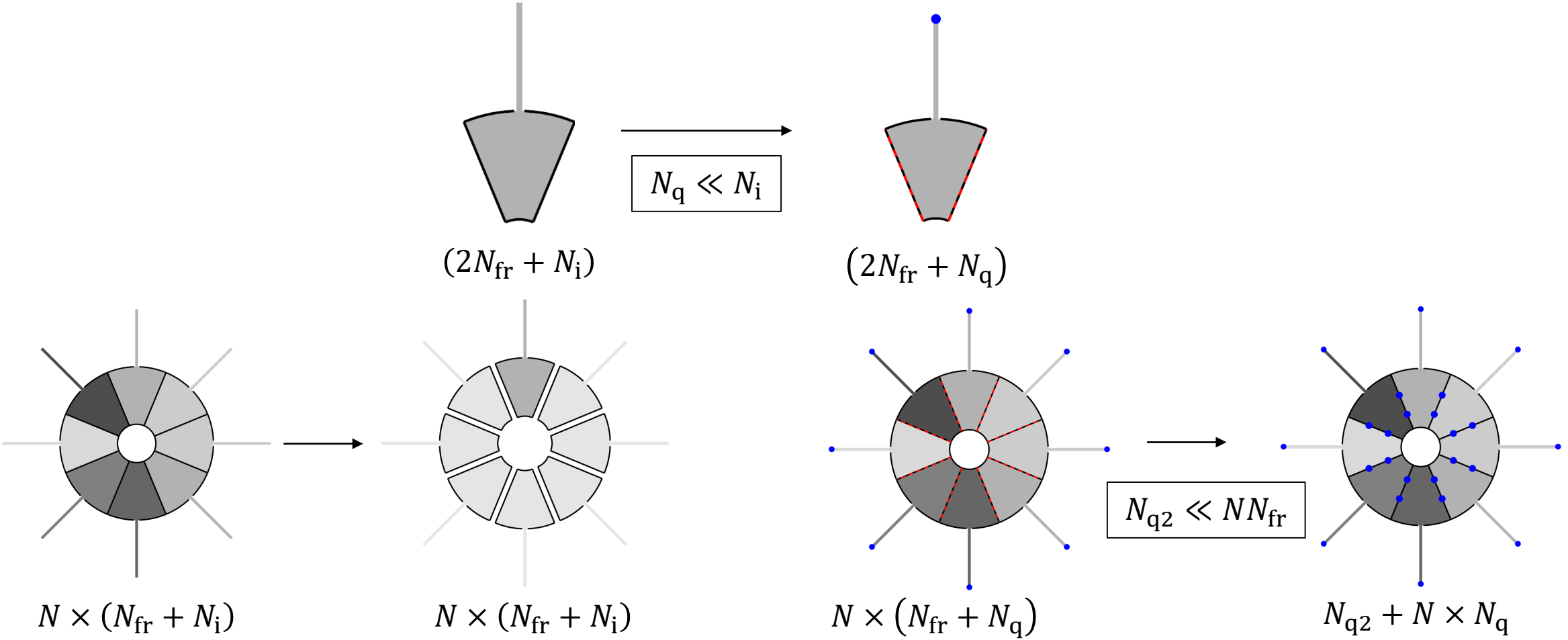
$$\left(\mathbf{K}_{\text{ass}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{ass}}\right) \mathbf{u}_{\text{ass}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}_{\text{ass}} = \Gamma \mathbf{q}$$



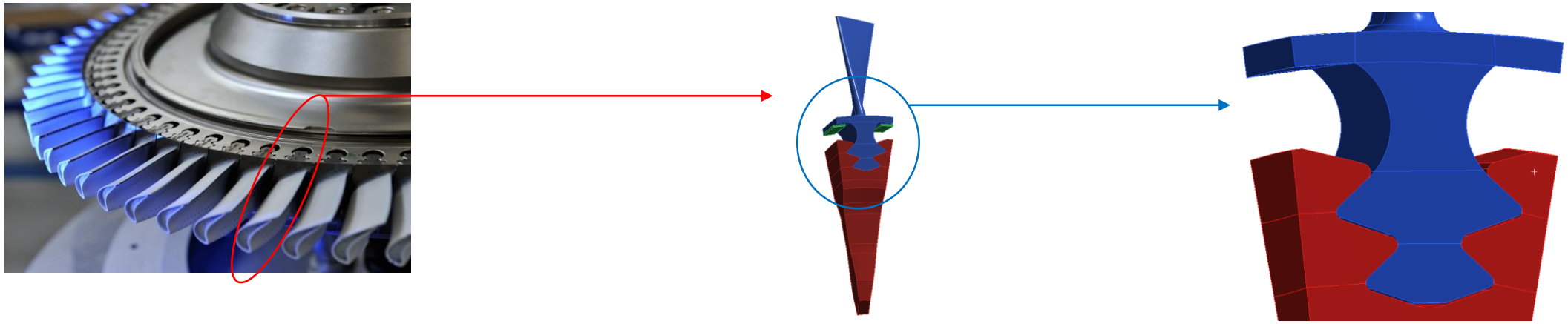
Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (1/2)

- Résumé de la réduction : N_{fr} / $\mathrm{N_i}$ (nombre de ddl à la frontière / interne)



Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (2/2)

- Dynamique non-linéaire : non-linéarités localisées (exemple zone de contact)



- Si étude sur un secteur
  - Nœuds référents : nœuds de contact entre les solides
  - Nœuds dépendants : tous les autres

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\mathrm{d} \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_\mathrm{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix}$$

Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (2/2)

- Equation du mouvement

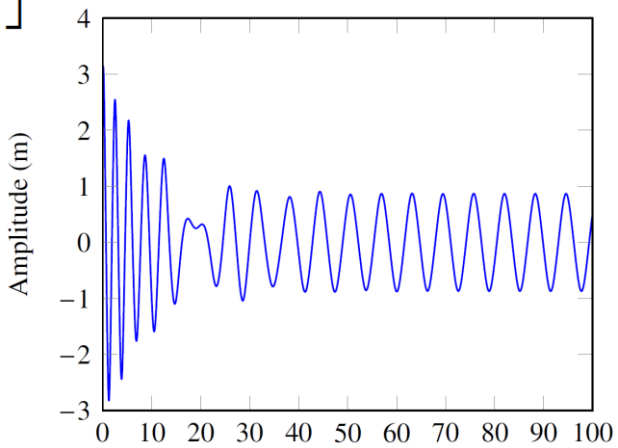
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{qq} & \mathbf{M}_{qr} \\ \mathbf{M}_{rq} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{u}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{qq} & \mathbf{C}_{qr} \\ \mathbf{C}_{rq} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{u}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{dr} \\ \mathbf{K}_{rd} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext,q} \\ \mathbf{f}_{ext,r} \end{bmatrix}$$

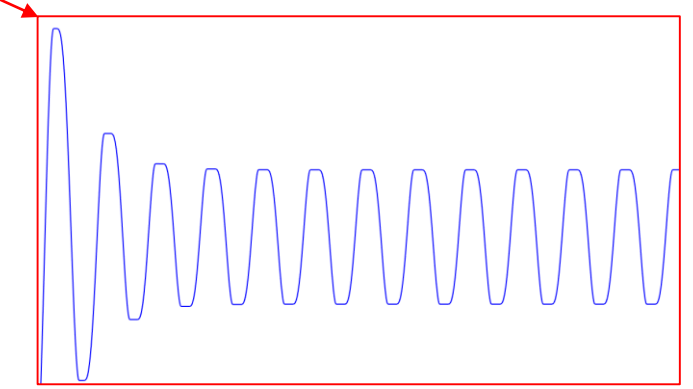
- Résolution par la HBM car excitation périodique
  - Solution périodique $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t))$
  - Passage d'une équation différentielle à une équation algébrique

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{qq} & \mathbf{Z}_{qr} \\ \mathbf{Z}_{rq} & \mathbf{Z}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_q \\ \mathbf{c}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{nl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{ext,q}} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{ext,r}} \end{bmatrix}$$

- Condensation sur les degrés de liberté non-linéaire

$$\mathbf{Z}_{red}\mathbf{c}_r + \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{nl}} = \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{ext,red}}$$





Utilisation de la réduction de Craig-Bampton (2/2)

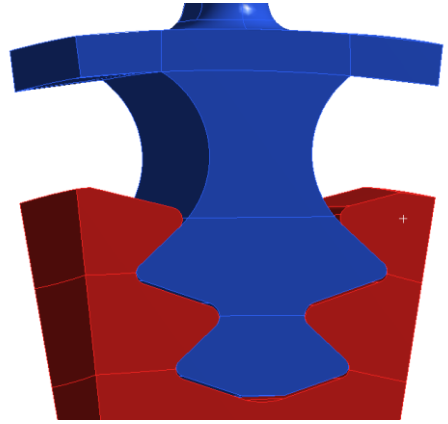
- Condensation relative $\mathbf{Z}_{\text{red}}\mathbf{c}_{\text{r}} + \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{nl}}} = \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{ext,red}}}$
  - Deux structures en contact

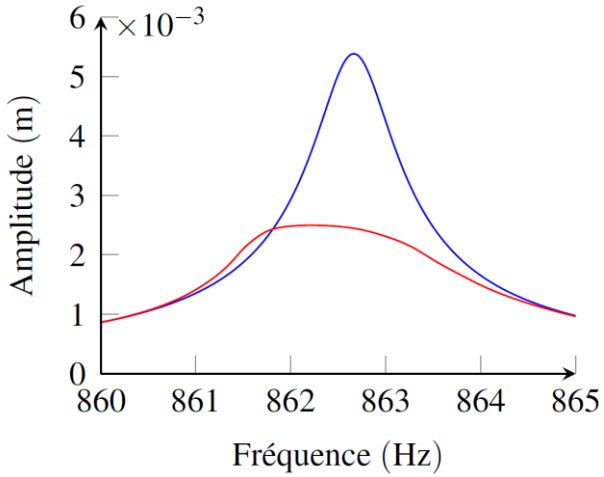
$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{red},1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{\text{red},2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\text{r},1} \\ \mathbf{c}_{\text{r},2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{nl},1}} \\ -\mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{nl},1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{ext,red},1}} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{ext,red},2}} \end{bmatrix}$$

  - Déplacement relatif

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\text{r},1} \\ \mathbf{c}_{\text{r},2} \end{bmatrix}$$

  - Equation finale $\mathbf{Z}_{\text{r}}\mathbf{c} + \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{nl},1}} = \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\text{ext,r}}}$



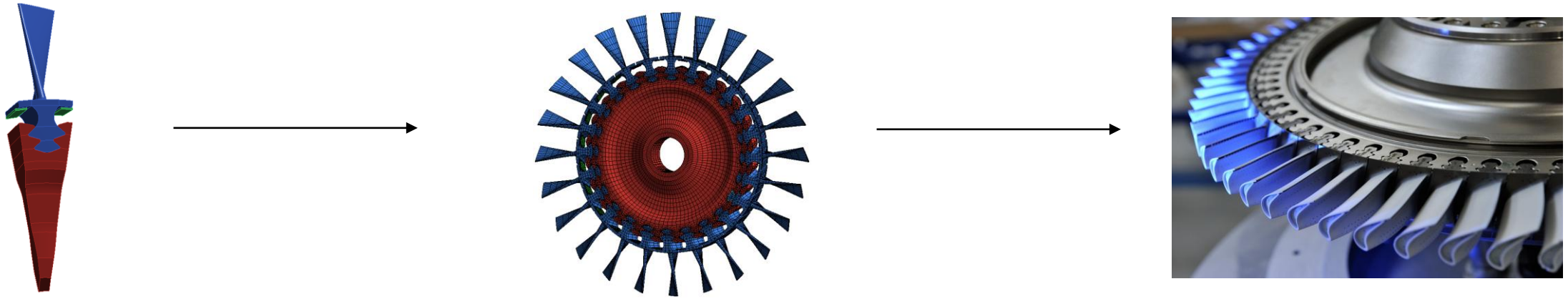


  - Réduction finale $N_{\text{ddl}} \rightarrow (2N_{\text{r}} + N_{\text{q1}} + N_{\text{q2}}) \rightarrow 2N_{\text{r}} \rightarrow N_{\text{r}}$

Craig-Bampton — Condensation sur ddl non-linéaire — Condensation relative

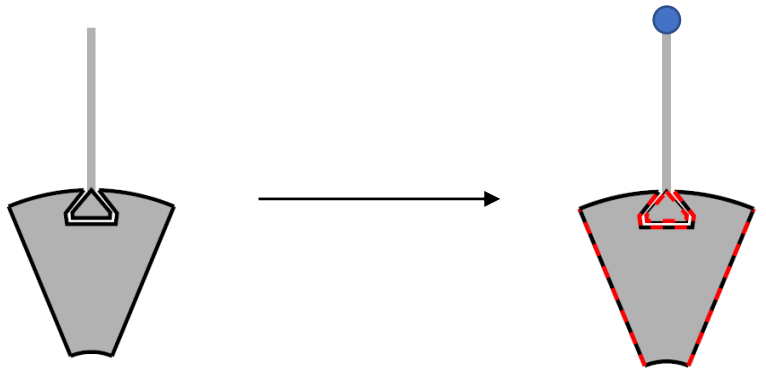
Réduction de Craig-Bampton non-linéaire

- Calcul sur une structure complète (Apwattanalunggarn et al. 2005, Joannin et al. 2017)



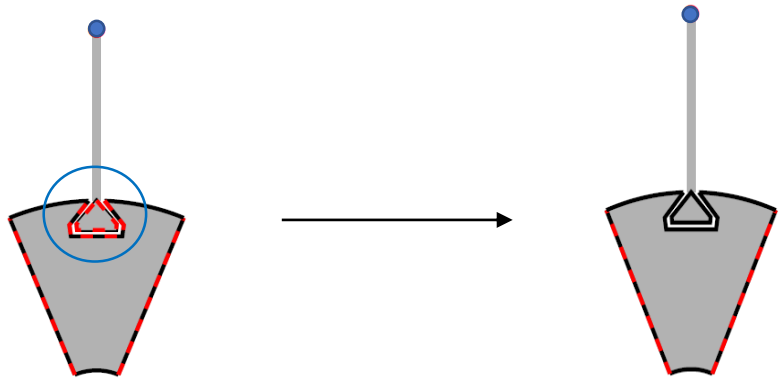
- Craig-Bampton linéaire
  - Nœuds référents : nœuds de contact entre les solides + nœuds aux frontières
  - Nœuds dépendants : tous les autres

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\mathrm{d} \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_\mathrm{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix}$$



Réduction de Craig-Bampton non-linéaire

- Craig-Bampton non-linéaire
  - Nœuds référents : nœuds aux frontières
  - Nœuds dépendants : nœuds contacts + autres

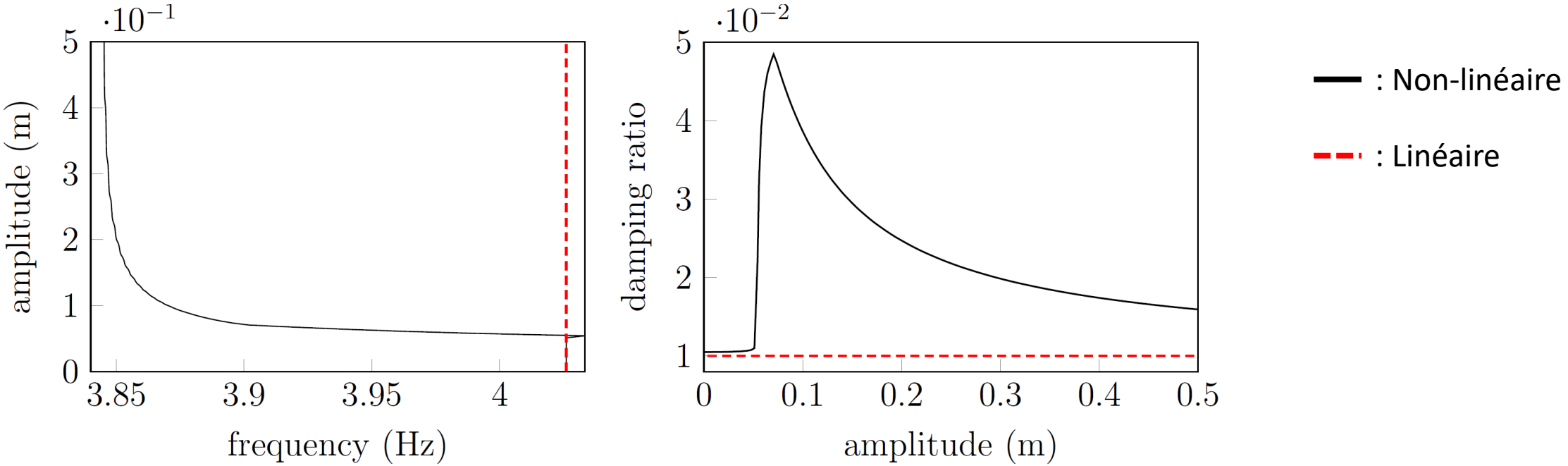


  - Calcul du modes non-linéaire avec les frontières fixes

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\mathrm{d} \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Phi(|q|) & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_\mathrm{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix}$$

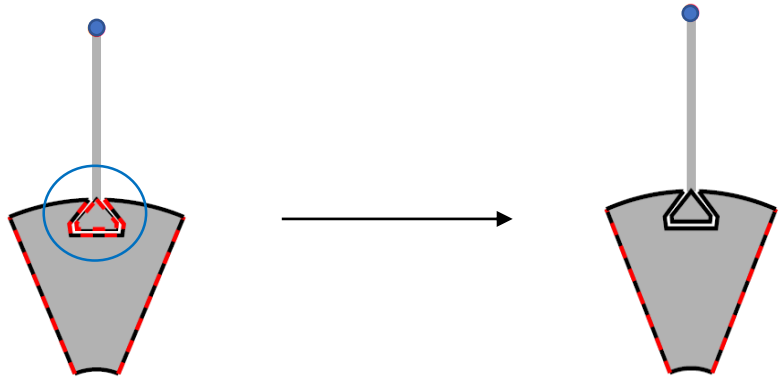
Mode non-linéaire : comment faire le calcul

- Résolution de l'équation $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}} = \mathbf{0}$
- HBM → passage à l'équation algébrique $\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\mathbf{c} + \mathbf{c}_{\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}} = \mathbf{0}$
- Initialisation sur le mode linéaire puis continuation
- Caractérisation $\phi_i(|q_i|)$, $\xi_i(|q_i|)$, et $\omega_i(|q_i|)$

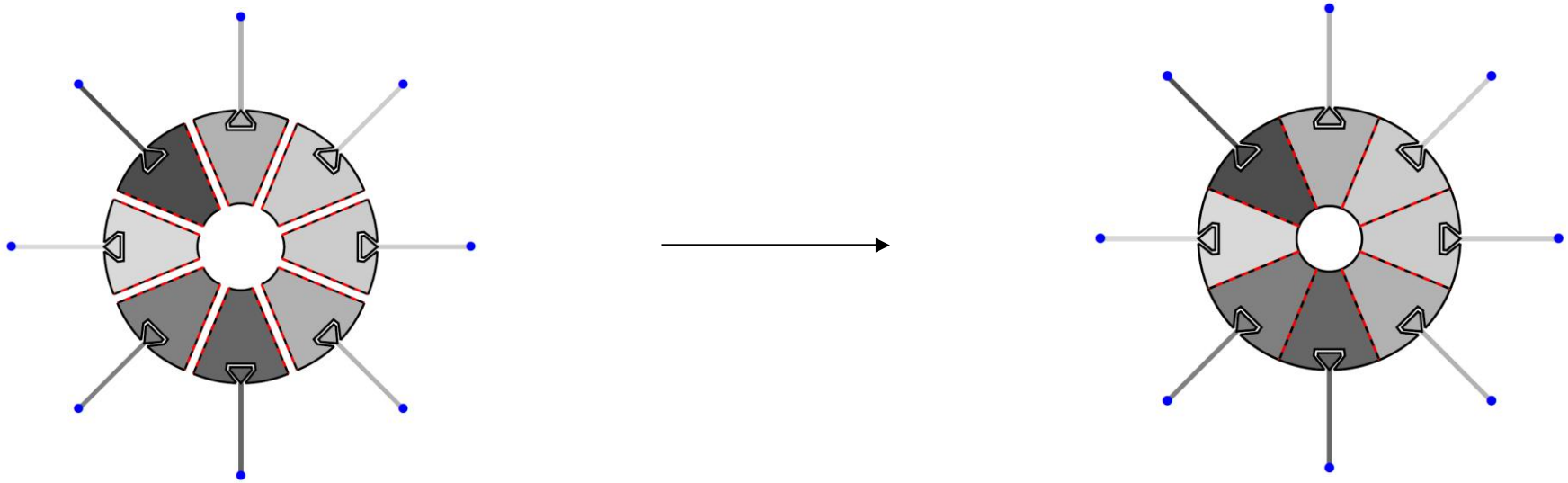


Réduction de Craig-Bampton non-linéaire

- Craig-Bampton non-linéaire
  - Nœuds référents : nœuds aux frontières
  - Nœuds dépendants : nœuds contacts + autres

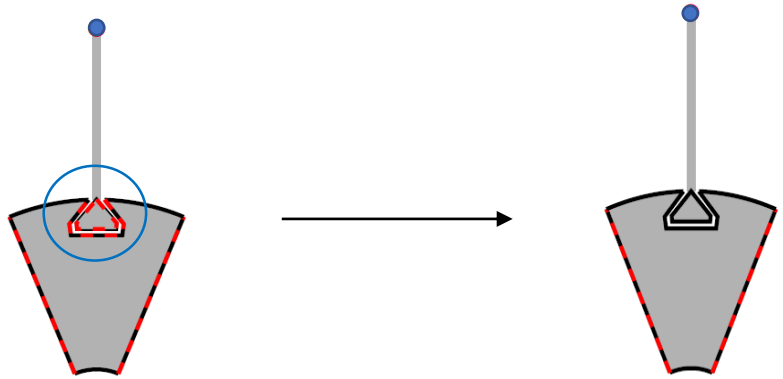


  - Calcul du modes non-linéaire avec les frontières fixes
  - Assemblage des sous-structures

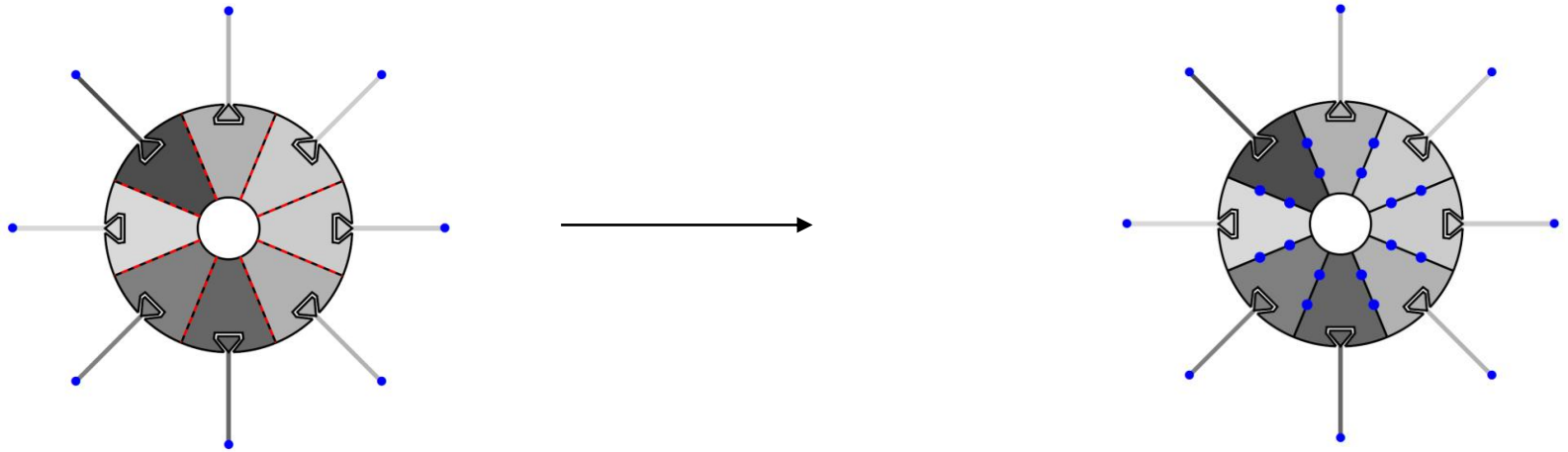


Réduction de Craig-Bampton non-linéaire

- Craig-Bampton non-linéaire
  - Nœuds référents : nœuds aux frontières
  - Nœuds dépendants : nœuds contacts + autres

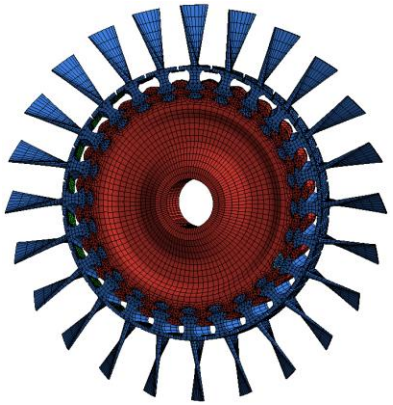


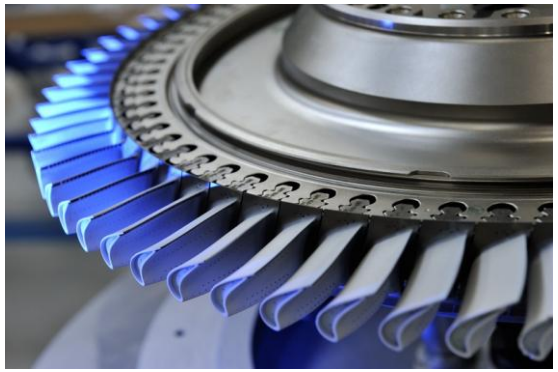
  - Calcul du modes non-linéaire avec les frontières fixes
  - Assemblage des sous-structures
  - Réduction des nœuds d'assemblage (modes d'interfaces)



Réduction de Craig-Bampton non-linéaire





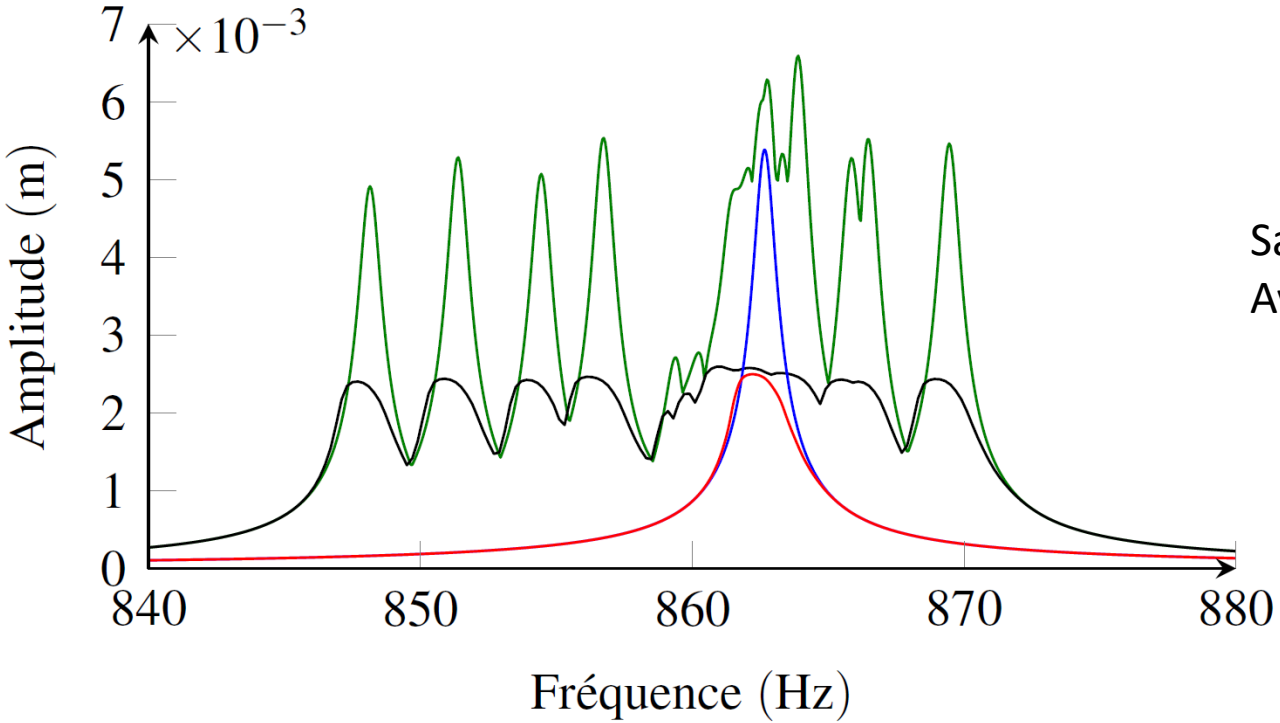


: structure simple linéaire

: structure simple non-linéaire

: structure complète linéaire

: structure complète non-linéaire



Sans réduction : 36h

Avec réduction : 5h

Conclusion partielle

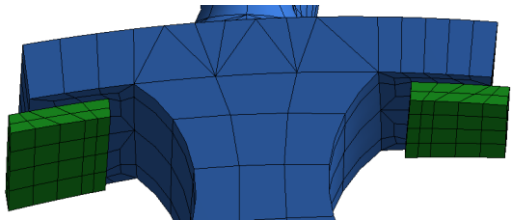
- Objectifs : réduire les temps de calcul des réponses dynamiques non-linéaires
  - Sur le cas d'une structure sans assemblage
    - Craig-Bampton linéaire (réduction des nœuds linéaires)
    - Condensation sur les nœuds non-linéaires
    - Condensation relative
  - Sur le cas d'une structure avec assemblage
    - Craig-Bampton linéaire (réduction des nœuds linéaires hormis ceux des frontières)
    - Craig-Bampton non-linéaire (réduction des nœuds de contact via un MNL)
    - Assemblage puis modes d'interfaces

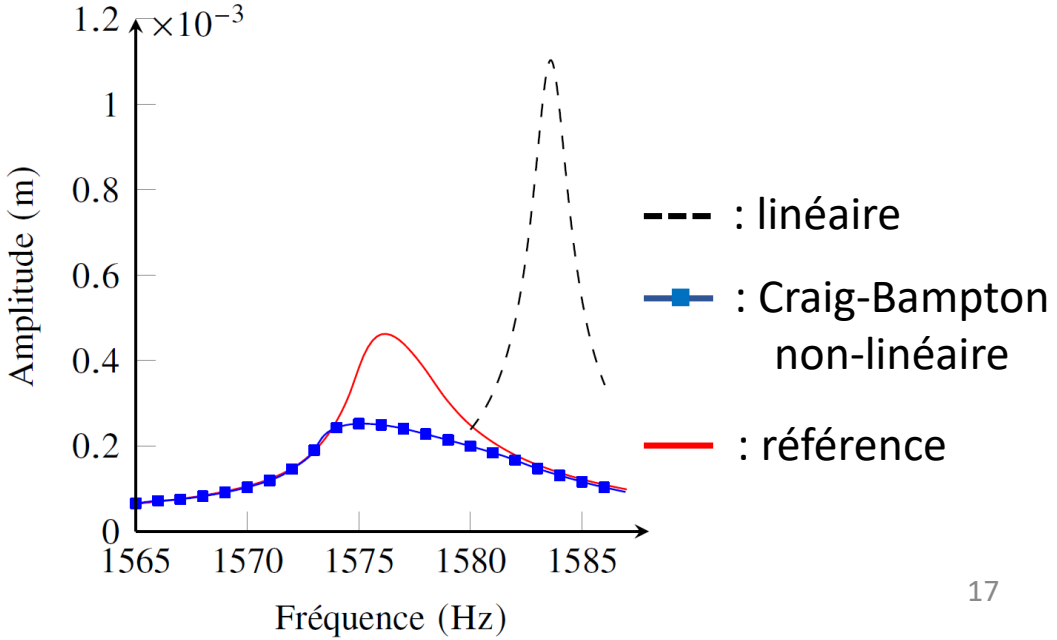
Limitations de l'approche (1/2)

- Craig-Bampton linéaire
  - Troncation des hautes fréquences avec le nombre des modes à interfaces fixes
  - Cas des problèmes multi-physiques (thermo-mécaniques)

- Craig-Bampton non-linéaire
  - Zones de contact proche des zones de frontières
  - → relevés statiques non-linéaires

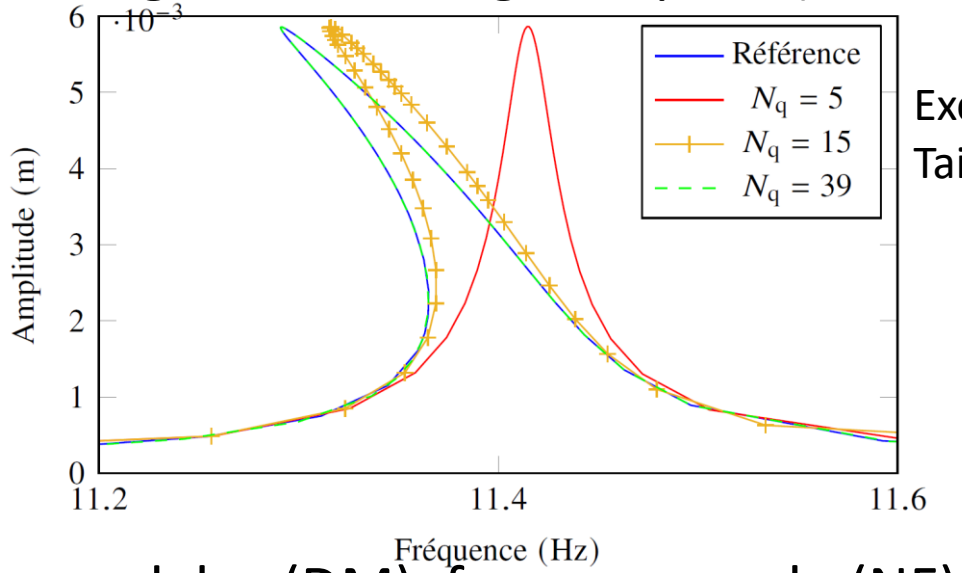
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\mathrm{d} \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Phi(|q|) & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_\mathrm{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix}$$



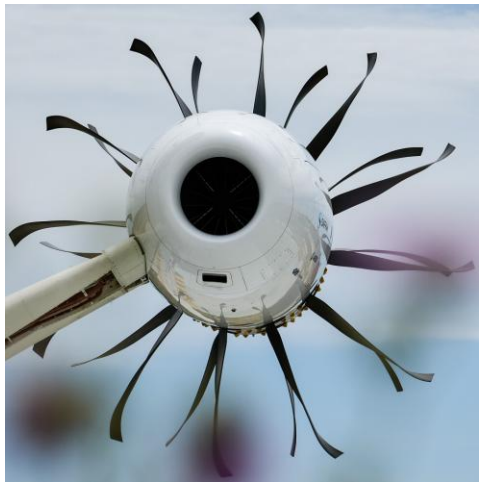


Limitations de l'approche (2/2)

- Cas des non-linéarités globales (exemple : non-linéarités géométriques)
  - Lente convergence de Craig-Bampton (modes à interfaces fixes peu représentatifs)



Excitation sur le premier mode
Taille du modèle : 41



https://medialibrary.safran-group.com/index_fr.html

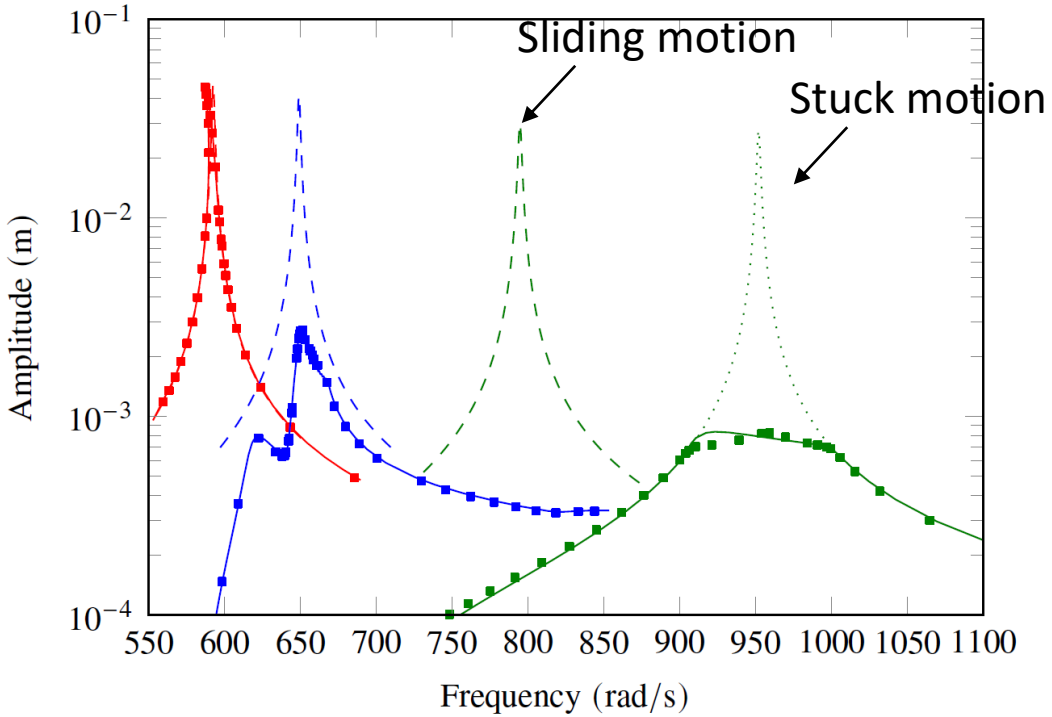
  - Dérivées modales (DM), forme normale (NF), etc

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\mathrm{d}} &\approx \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{mode}}} \Phi_i(\mathbf{q})\, q_i \\
&\approx \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{mode}}} \left(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{mode}}} \frac{\partial \left(\Phi_i(\mathbf{q})\, q_i\right)}{\partial q_j}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \right) q_j + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{mode}}} \left(\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{mode}}} \left(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{mode}}} \frac{\partial^2 \left(\Phi_i(\mathbf{q})\, q_i\right)}{\partial q_j \partial q_k}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \right) q_j q_k \right) \\
&\approx \phi_{\mathrm{L}} \mathbf{q}_{\mathrm{L}} + \Theta \mathbf{p}
\end{aligned}
$$

Limitations de l'approche (2/2)

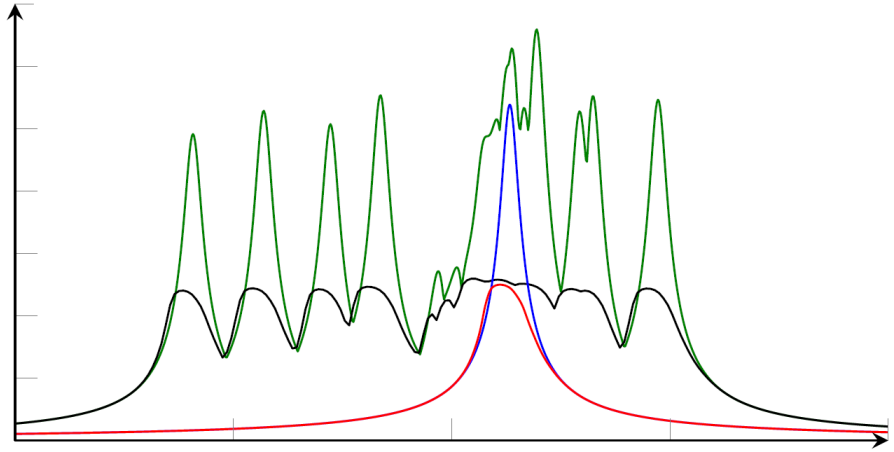
- Cas mix (contact + géométrique) (Long and Tiso, 2016) (Delhez et al. 2021)
  - Besoin de garder les nœuds de contact
    - Compatible avec Craig-Bampton
    - Incompatible avec DM ou NF → développement limité autour d'un état initial (collé ? glissant ?)
  - Mais aussi de restituer la dynamique des grandes déformations
    - Compatible avec DM ou NF
    - Incompatible avec Craig-Bampton
  - → combinaison de Craig-Bampton
  - + dérivées modales sur la structure libre

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\mathrm{d} \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Phi & \Psi & \Theta_\mathrm{d} - \Psi\Theta_\mathrm{r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_\mathrm{r}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \mathbf{u}_\mathrm{r} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$$



Méthode de synthèse modale pour les systèmes non-linéaires : applications aux contacts frottants et limites de l'approche Craig-Bampton

Samuel QUAEGEBEUR



ÉCOLE CENTRALE LYON

LTDS Tribologie et Dynamique des Systèmes UMR 5513