Journées annuelles du **GdR EX-MODELI** — 15 et 16 octobre 2026, LMA, Marseille

Prédire la dynamique des systèmes multistables : Au-delà de l'analyse de bifurcation

Baptiste Bergeot

INSA CVL, Univ Orléans, Univ Tours, LaMé, UR 7494, Blois, France

Soizic Terrien

LAUM, UMR 6613, Institut d'Acoustique-Graduate School (IA-GS), CNRS, Le Mans, France

15 octobre 2026

Plan

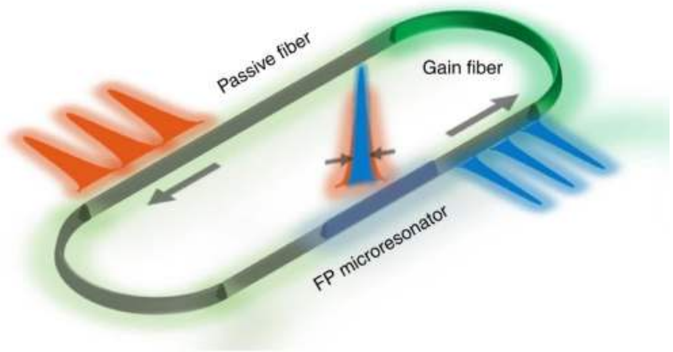
1. **Introduction : l'analyse du bifurcation et ses limites**
   i. Généralités
   ii. Modèles d'instruments auto-oscillants
   iii. Éléments d'analyse « classique » de bifurcation
   iv. Limites de l'analyse « classique » de bifurcations
2. **Bassins d'attraction**
   i. Mise en évidence
   ii. Calcul des séparatrices entre bassins d'attraction
3. **Basculement induit pas la vitesse de variation d'un paramètre**
   i. Introduction
   ii. Exemples dans modèles simple d'instruments de musique
   iii. Exemples dans un instrument réel
   iv. Séparatrice de basculement : un outil prédictif

1. Introduction :
L’analyse du bifurcation et ses limites

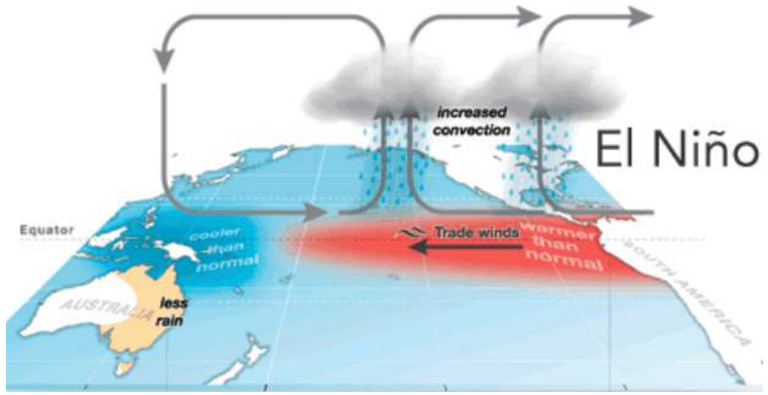
Systèmes dynamiques non linéaires

- Systèmes dont le comportement **évolue dans le temps**
- **Non linéaires :** les conséquences ne sont **pas proportionnelles** aux causes

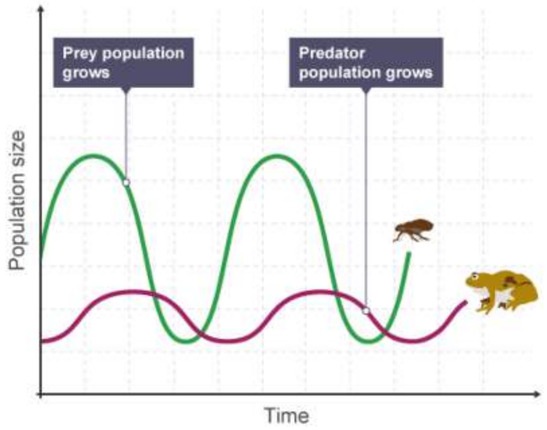
Optique



Sciences du climat

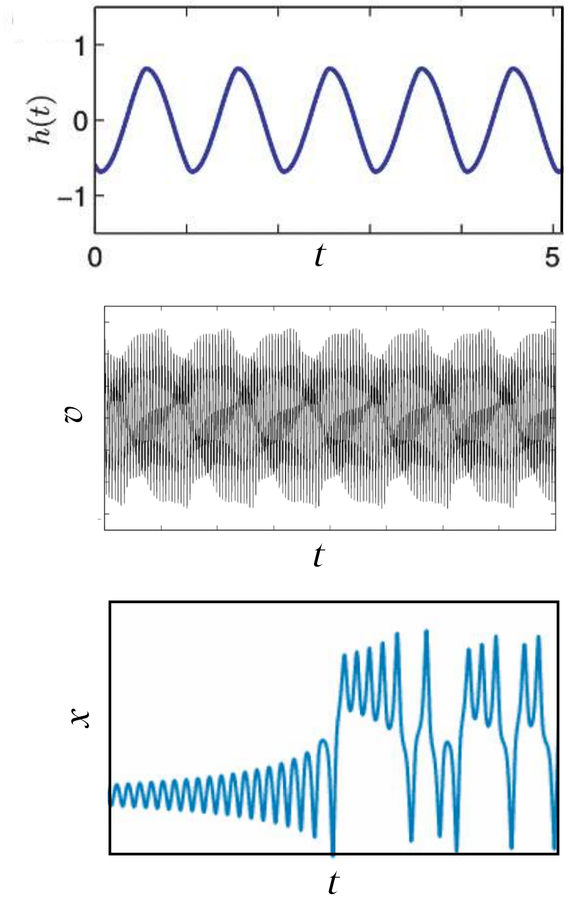


Ecologie

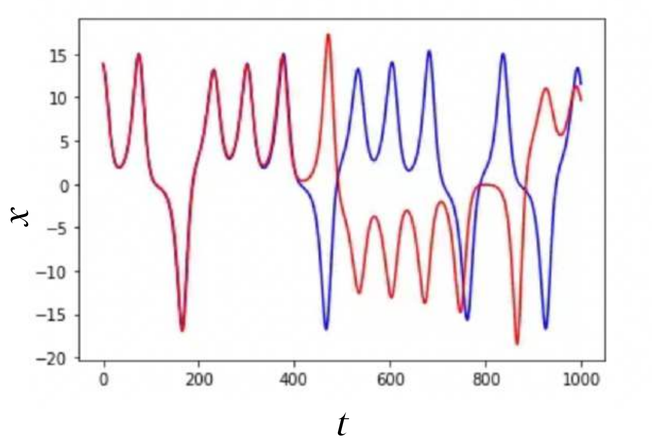


Systèmes dynamiques non linéaires : comportement complexe

Diversité de régimes



Sensibilité aux conditions initiales

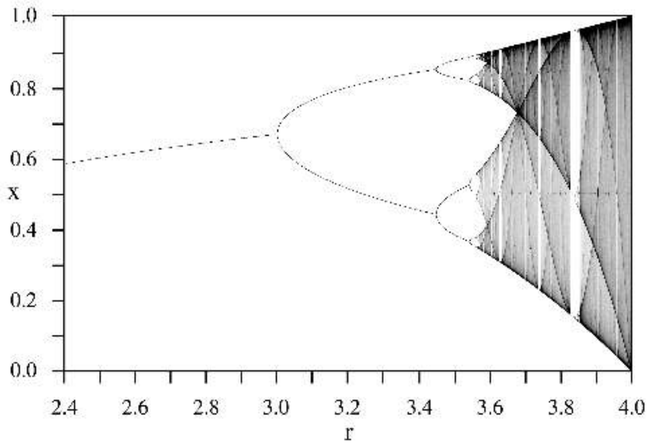


Petite perturbation sur les conditions initiales

↓

comportements très différents à long terme

Bifurcations



Changement brutal du comportement sous l'effet de la (petite) variation d'un paramètre.

Le cas des instruments de musique auto-oscillants

- Instruments qui produisent du son à partir d'une source d'énergie continue fournie par l'instrumentiste

Instruments à vent





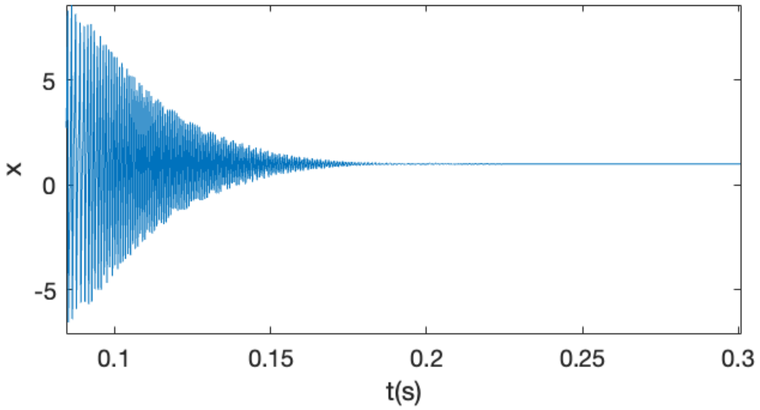


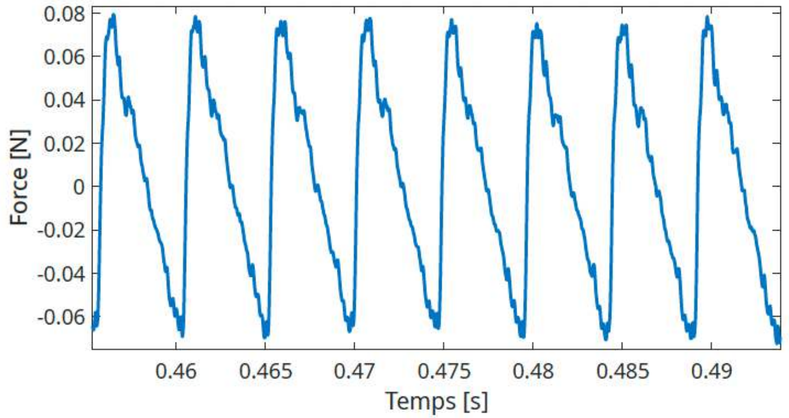


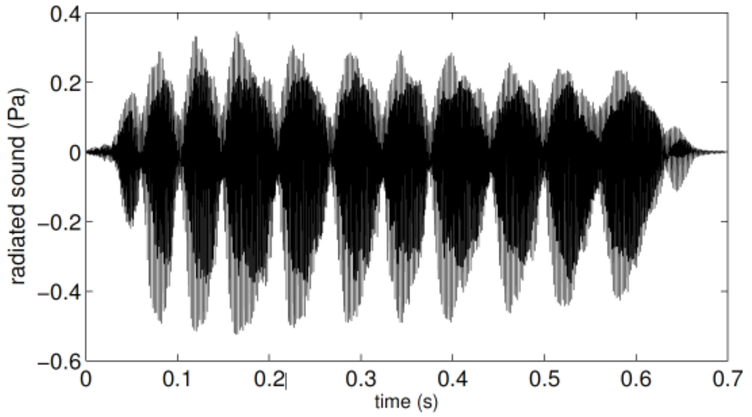
Instruments à cordes frottées



- Systèmes dynamiques non linéaires, montrant une diversité de régimes sonores







Le cas des instruments de musique auto-oscillants

Quels sont les régimes sonores possibles, en fonction des paramètres de conception et de contrôle ?

- Accéder à une **cartographie exhaustive** des régimes
- **Comprendre et prédire** la dynamique complexe des instruments

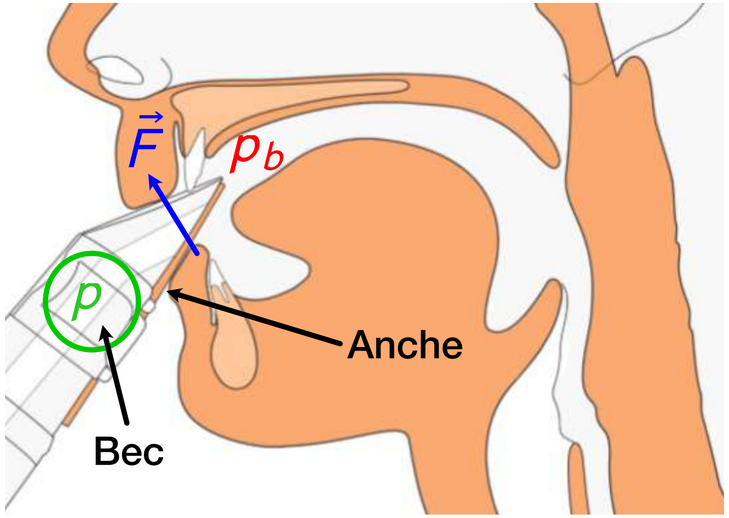
Comment accéder, en pratique, à un régime en particulier ?

- « **Jouabilité** » des différents régimes
- Liens avec le **contrôle** / le jeu expert des instrumentistes

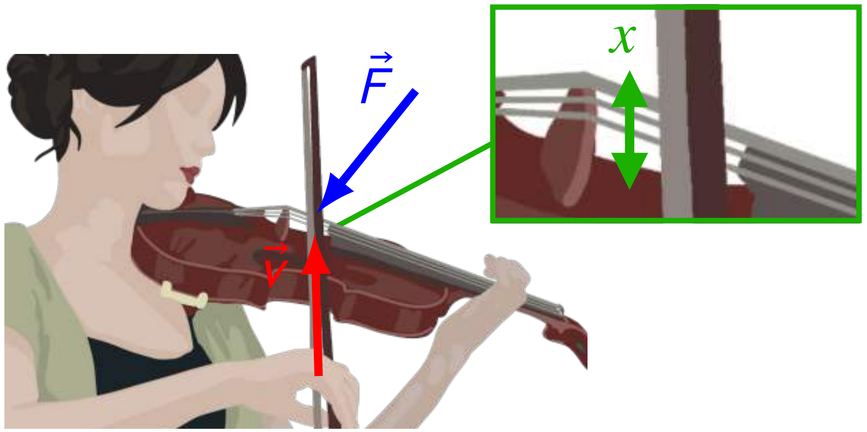
Modèles d'instruments auto-oscillants

Instruments à anche simple et à cordes frottées

Clarinette



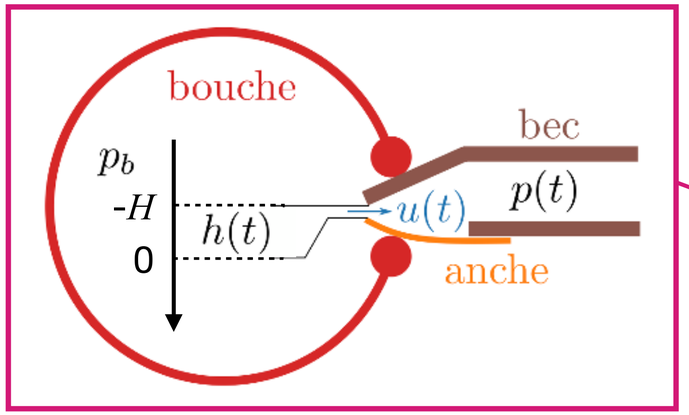
Violon



Modélisés par des **systèmes dynamiques non linéaires** reliant des **paramètres de contrôle** λ (pression d'air dans la bouche p_b, force exercée par les lèvres $\vec{F}$, vitesse $\vec{v}$ de l'archet, force $\vec{F}$ d'appui de l'archet) à des **variables d'état** X (pression acoustique p à l'intérieur du bec, déplacement x de la corde, et leur dérivées) :

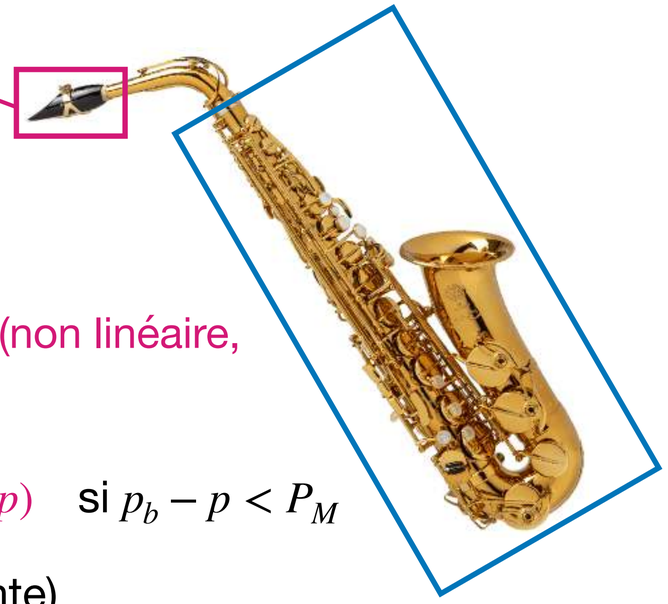
$$\dot{X} = f(X, \lambda)$$

Instruments à anche



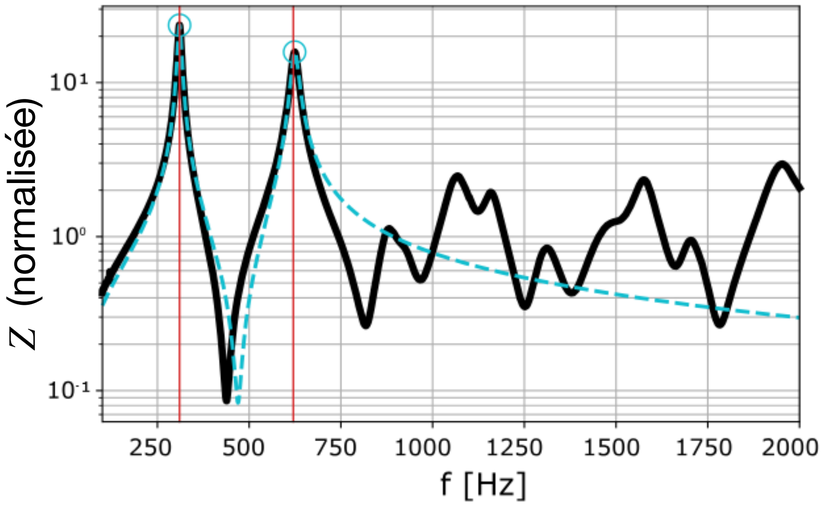
Équation de l'anche (linéaire, ressort sans masse) :

$$h = (p - p_b)/K$$



Équation du résonateur (linéaire, impédance d'entrée) :

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{U(\omega)} = j\omega \sum_n \frac{H_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_n\xi_n}$$



Équation du débit entrant dans l'instrument (non linéaire, Bernoulli) :

$$F(p) = \begin{cases} u = u_A \left[1 - \frac{p_b - p}{p_M}\right] \sqrt{\frac{|p_b - p|}{p_M}} \operatorname{sign}(p_b - p) & \text{si } p_b - p < P_M \\ u = 0 \quad \text{si } p_b - p > P_M \quad \text{(anche battante)} \end{cases}$$

Exemple. Modèle à 1 mode :

$$P(\omega)\left[\omega_1^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_1\xi_1\right] = j\omega H_1 U(\omega)$$

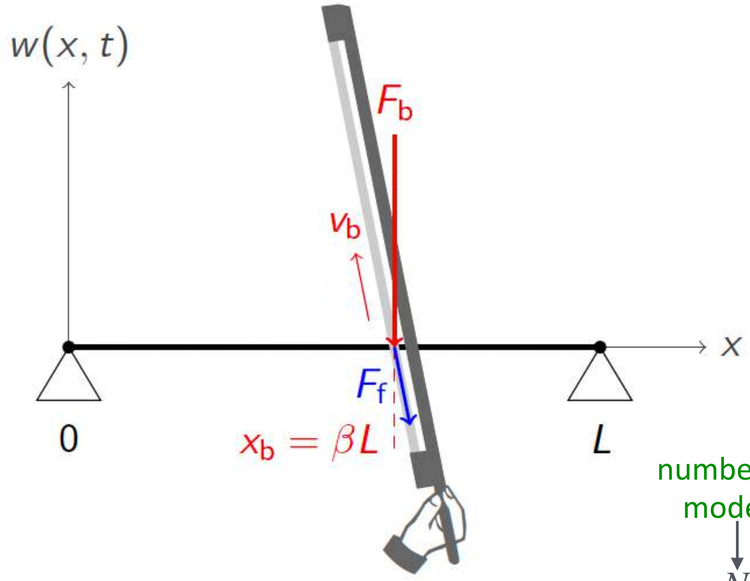
Transformée de Fourier inverse

$$\ddot{p}(t) + 2\xi_1\omega_1\,\dot{p}(t) + \omega_1^2\,p(t) = H_1\,\dot{u}(t) = H_1\,\dot{p}(t)F'(p(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{X} = f(X; p_b, u_A) \quad \text{avec} \quad X = (p, \dot{p})}$$

Illustrations : [R. Matteoli (2022), Thèse] ; Modèles : [Chaigne & Kergomard (2026),Springer]

Instruments à cordes frottées



- Hypothèses : pas de torsion, conditions aux limites encastrées, contact ponctuel archet/corde

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial w}{\partial t}-T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=F(x,t)$$

linear density — viscous damping — tension — Young modulus — quadratic moment

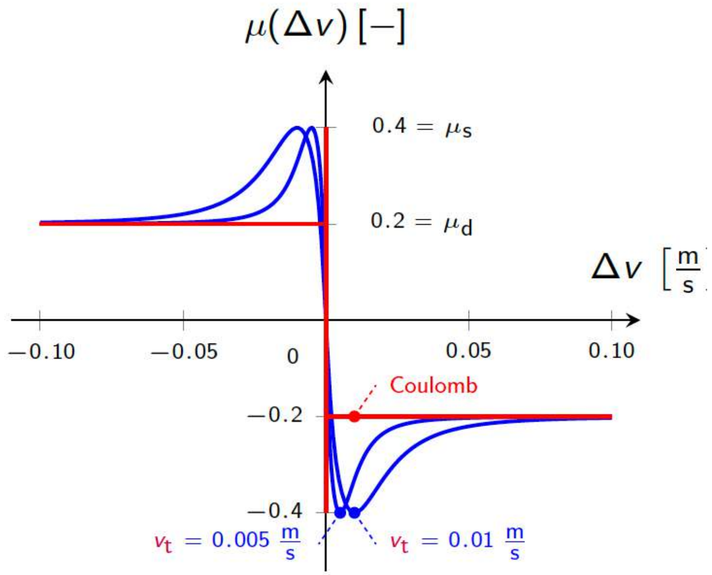
force de frottement exercée par l'archet

$w(x,t)$: déplacement transverse de la corde

- Formalisme modal :

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{N} q_n(t)\phi_n(x) \quad \text{with} \quad \phi_n(x)=sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

number of modes — modal displacements — mode shapes



- Projection modale → système de N équations différentielles ordinaires du 2nd ordre :

$$\ddot{q}_n+2\xi_n\omega_n\dot{q}_n+\omega_n^2 q_n=\frac{f_n}{m_n}$$

avec : $f_n=F_T\phi_n(x_b)$ et $F_T=\mu(\Delta v)F_B$

Instruments à cordes frottées

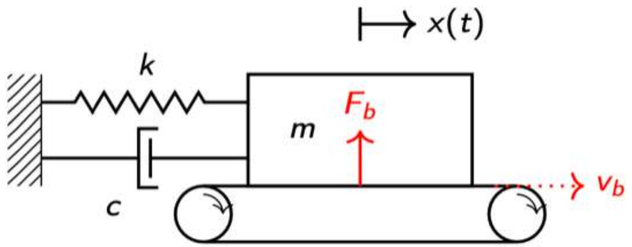
Réduction à **1 mode** :

$$\ddot{q}_1 + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_1 + \omega_n^2 q_1 = \frac{F_B}{m_1}\mu(\dot{q}_1 - v_b)sin(\pi\beta)$$

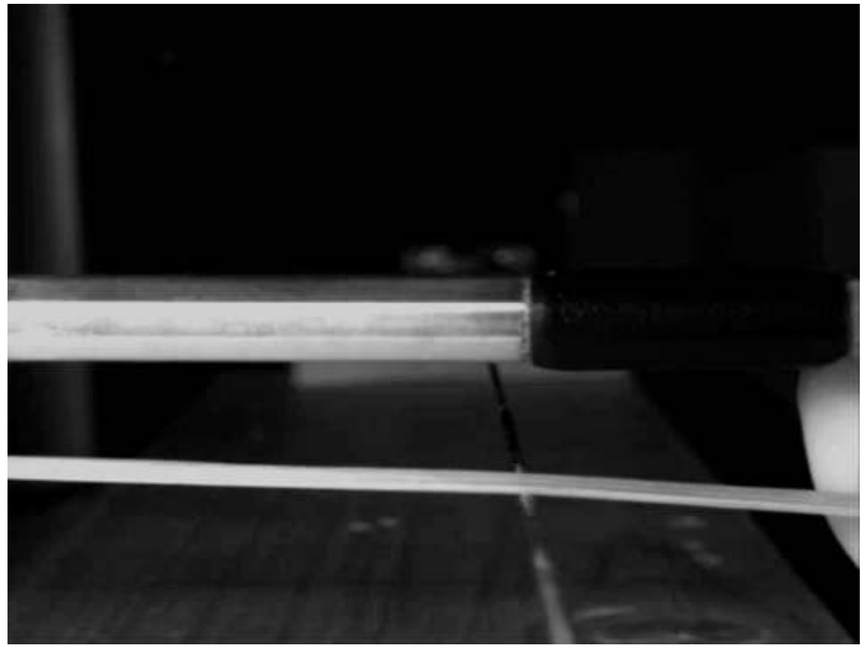
paramètres de contrôle

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -2\xi_n\omega_n z_1 - \omega_n^2 q_1 + \frac{F_B}{m_1}\mu(z_1 - v_b)sin(\pi\beta) \end{cases}$$

Minimal oscillator producing stick-slip regimes and bistable



Vidéo. Mouvement d'une corde de violon en slow motion



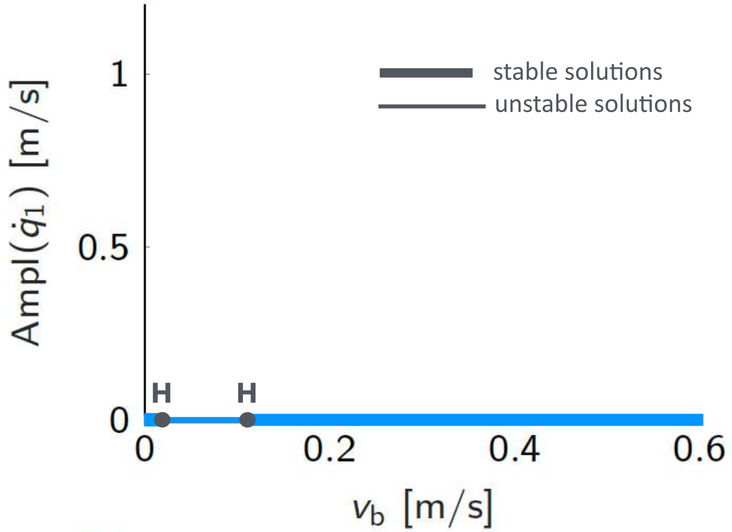
Comment caractériser la dynamique : analyse de bifurcation

Réduction à **1 mode** :

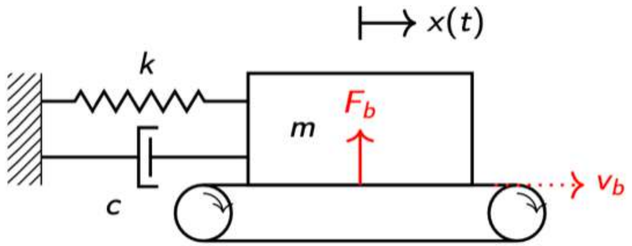
$$\ddot{q}_1 + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_1 + \omega_n^2 q_1 = \frac{F_B}{m_1}\mu(\dot{q}_1 - v_b)sin(\pi\beta)$$

paramètres de contrôle

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -2\xi_n\omega_n z_1 - \omega_n^2 q_1 + \frac{F_B}{m_1}\mu(z_1 - v_b)sin(\pi\beta) \end{cases}$$



Minimal oscillator producing stick-slip regimes and bistable



Comment caractériser la dynamique : analyse de bifurcation

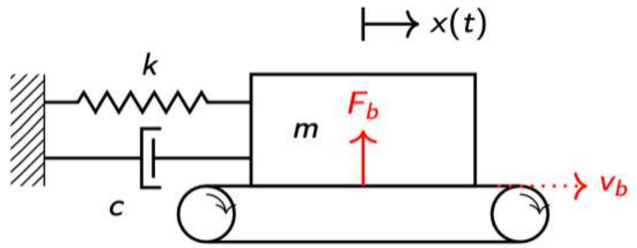
Réduction à **1 mode** :

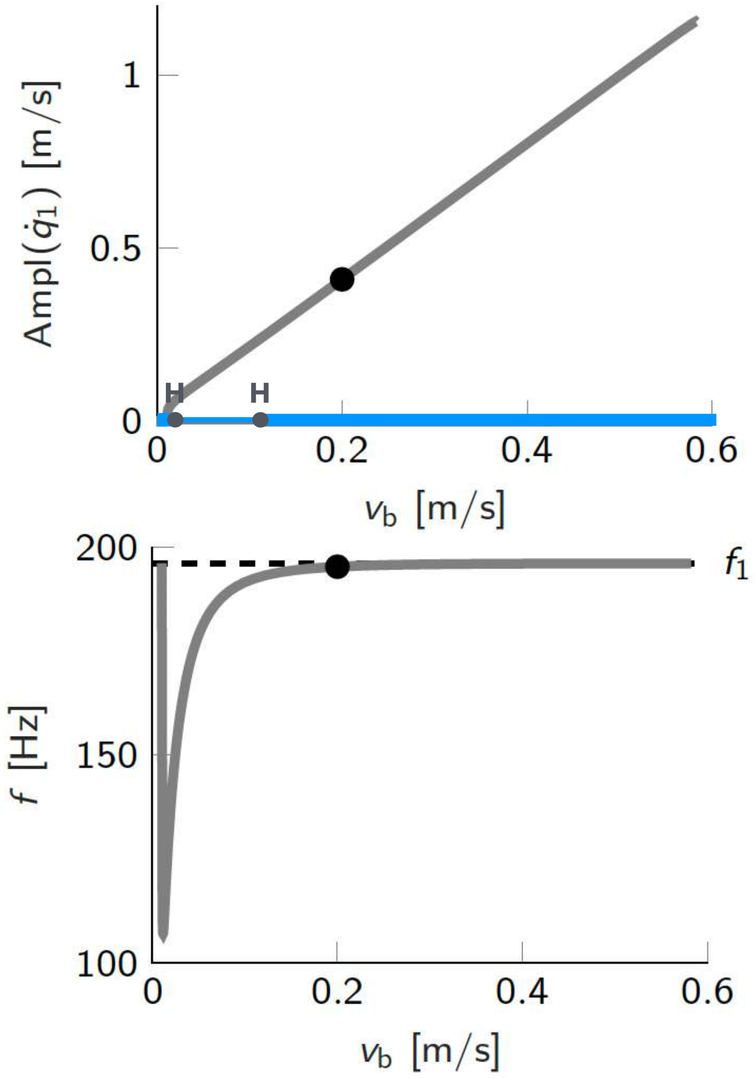
$$\ddot{q}_1 + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_1 + \omega_n^2 q_1 = \frac{F_B}{m_1}\mu(\dot{q}_1 - v_b)sin(\pi\beta)$$

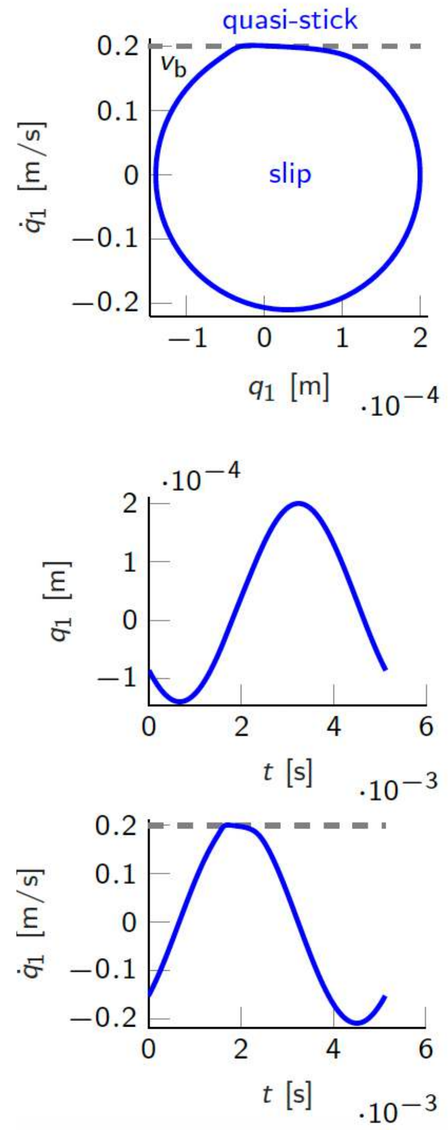
paramètres de contrôle

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -2\xi_n\omega_n z_1 - \omega_n^2 q_1 + \frac{F_B}{m_1}\mu(z_1 - v_b)sin(\pi\beta) \end{cases}$$

Minimal oscillator producing stick-slip regimes and bistable







Comment caractériser la dynamique : analyse de bifurcation

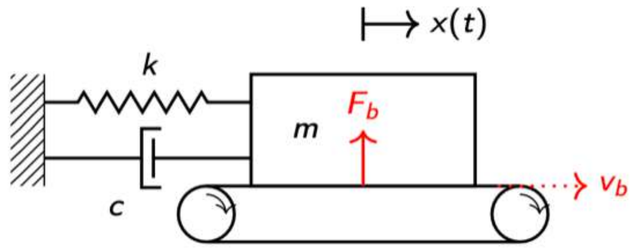
Réduction à **1 mode** :

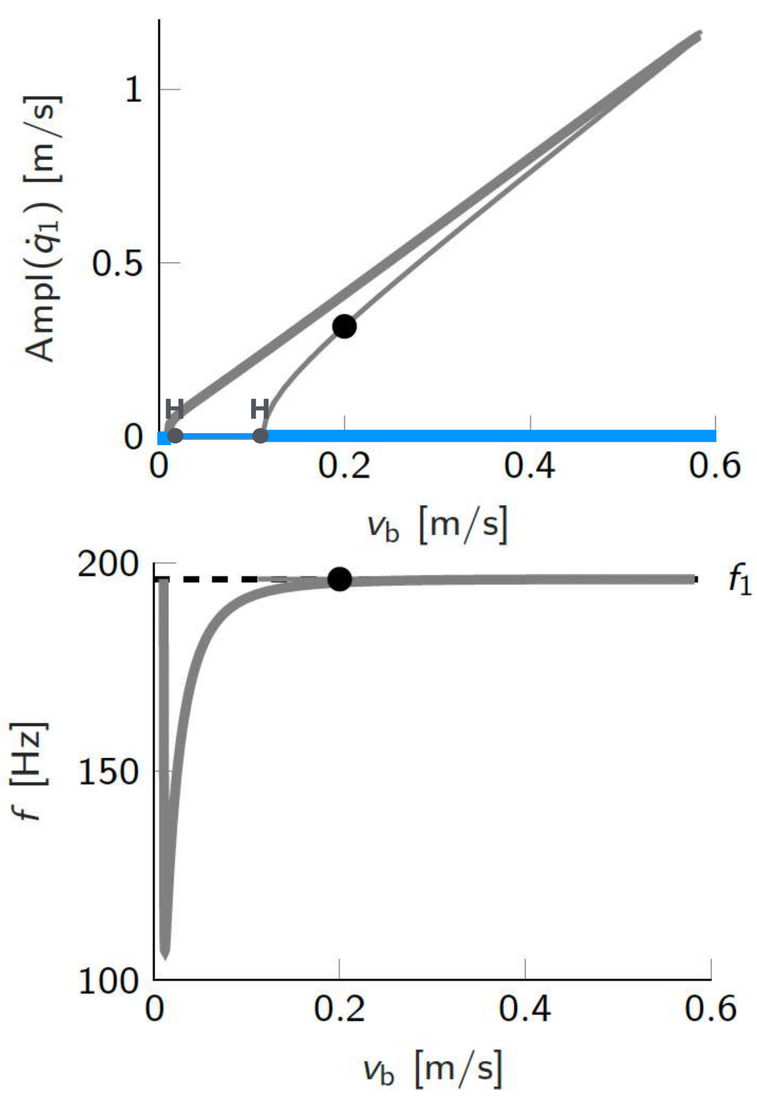
$$\ddot{q}_1 + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_1 + \omega_n^2 q_1 = \frac{F_B}{m_1}\mu(\dot{q}_1 - v_b)sin(\pi\beta)$$

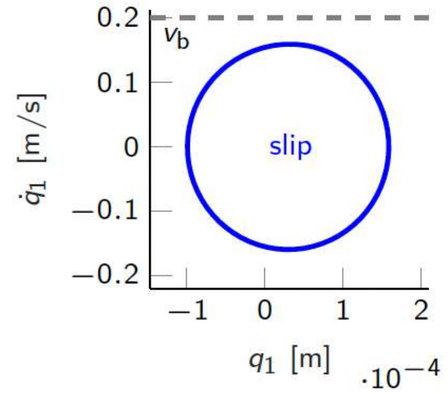
paramètres de contrôle

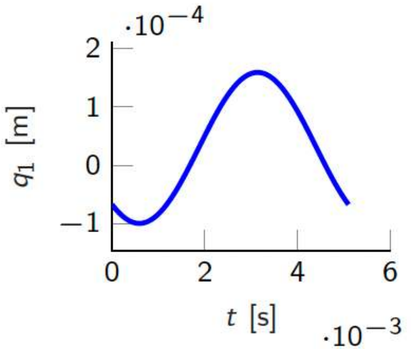
$$\begin{cases} \dot{q}_1 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -2\xi_n\omega_n z_1 - \omega_n^2 q_1 + \frac{F_B}{m_1}\mu(z_1 - v_b)sin(\pi\beta) \end{cases}$$

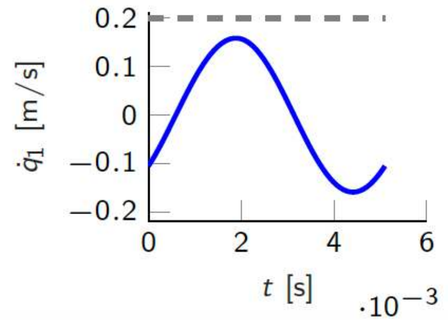
Minimal oscillator producing stick-slip regimes and bistable







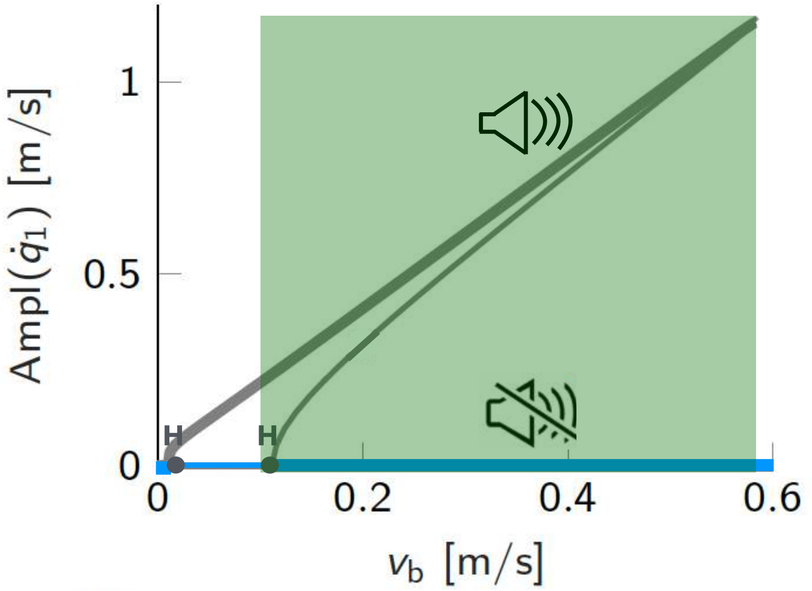




Comment caractériser la dynamique : analyse de bifurcation

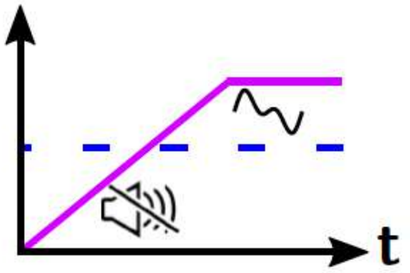
Analyse de bifurcation :

- Cartographie des régimes en fonction des paramètres.
- Connaissance globale de la dynamique.
- Prédiction des changements de comportement sous l'effet d'un changement de paramètre.



Limites de l'analyse de bifurcations

- Zones de **multistabilité** : quel régime est atteint en pratique ?
  - ➡ Notion de **bassin d'attraction** (partie 2)
- Pas de prise en compte de la **dynamique des paramètres**, qui sont supposés statiques.
  - ➡ Notion de **basculement induit par la vitesse (ou taux) de variation des paramètres** (partie 3)
- Pas d'information sur les **régimes transitoires** (non traités aujourd'hui)

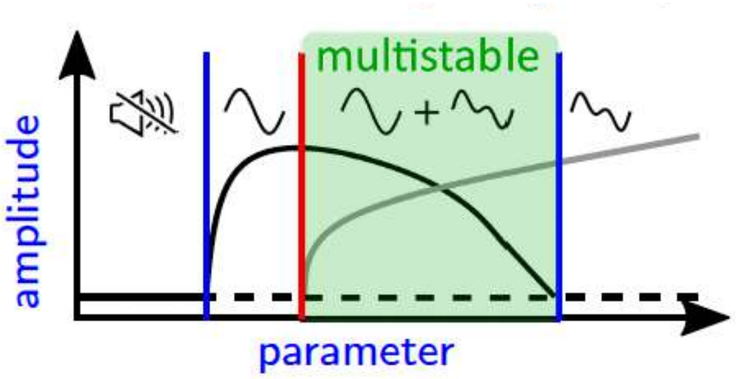


2. Bassins d’attraction

Comment jouer un régime donné parmi les régimes possibles ?

Multistabilité

- Coexistence de **plusieurs régimes stables** pour des **paramètres identiques**
- Extrêmement fréquente dans les systèmes dynamiques
- Nombreux exemples dans les instruments de musique auto-oscillants



Comment jouer un régime particulier ?

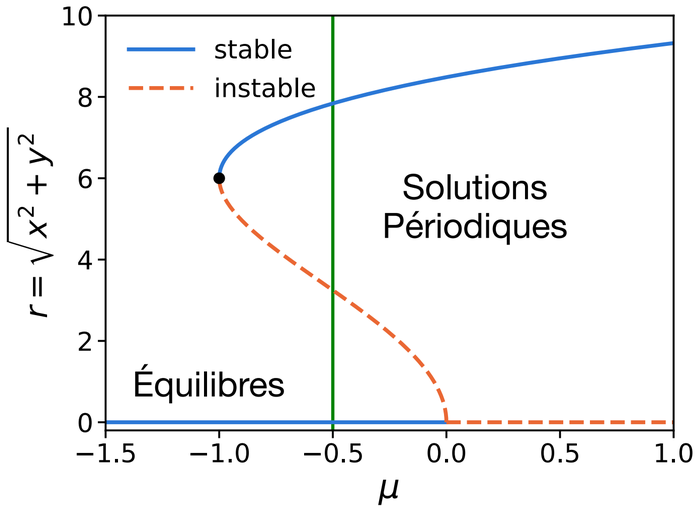
- Lié au **contrôle** de l'instrumentiste
- Du point de vue des systèmes dynamiques :
  - Dépend des **conditions initiales** (sur les variables et non sur les paramètres)
  - Soulève la question des **bassins d'attraction**

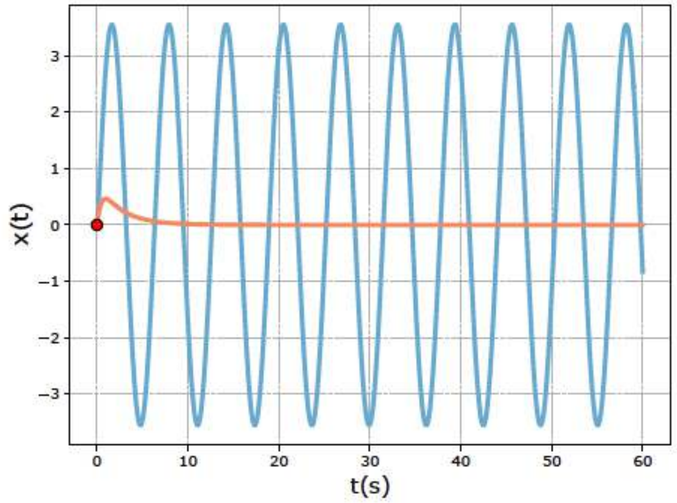


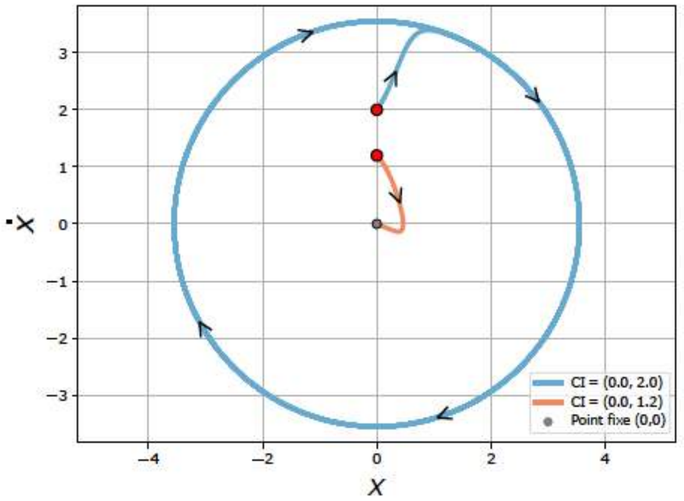
Notion de bassin d'attraction

Exemple : oscillateur de Van der Pol avec non-linéarité d'ordre 5

$$\ddot{x} + [-\mu + \sigma(x^2 + \dot{x}^2) + \nu(x^2 + \dot{x}^2)^2]\dot{x} + x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = [\mu - \sigma(x^2 + y^2) - \nu(x^2 + y^2)^2]y - x = 0 \end{cases}$$





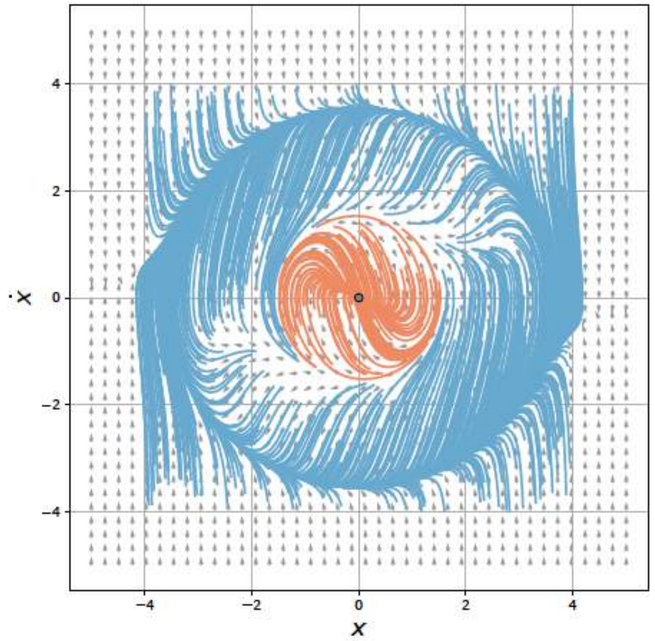


- À **paramètres fixes** : coexistence d'une **solution d'équilibre stable** et d'une **solution périodique stable.**
- Les **conditions initiales** sur les variables d'état (x,y) déterminent **quelle solution est observée**.

Notion de bassin d'attraction

Exemple : oscillateur de Van der Pol avec non-linéarité d'ordre 5

$$\ddot{x} + [-\mu + \sigma(x^2 + \dot{x}^2) + \nu(x^2 + \dot{x}^2)^2]\dot{x} + x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = [\mu - \sigma(x^2 + y^2) - \nu(x^2 + y^2)^2]y - x = 0 \end{cases}$$



Bassin d'attraction

Ensemble des **conditions initiales** menant à une solution stable donnée, parmi les différentes solutions stables qui coexistent.

- À **paramètres fixes** : coexistence d'une **solution d'équilibre stable** et d'une **solution périodique stable.**
- Les **conditions initiales** sur les variables d'état (x,y) déterminent **quelle solution est observée**.

Calculer les bassin d'attraction

Différentes approches :

- « **force brute** » : simulations à partir d'un maillage de l'espace des conditions initiales ⟶ « curse of dimensionality »
- calcul des **frontières** entre bassins d'attraction

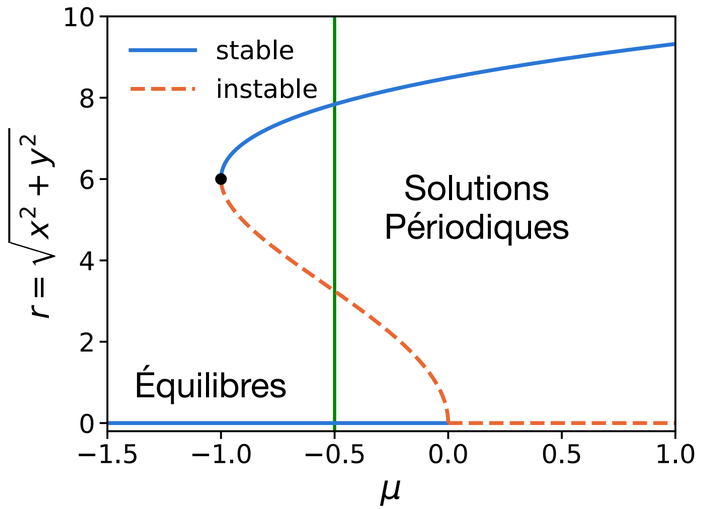
  ↪ approches par **apprentissage machine** (SVM) : simulations + critère de classification + maillage adaptatif

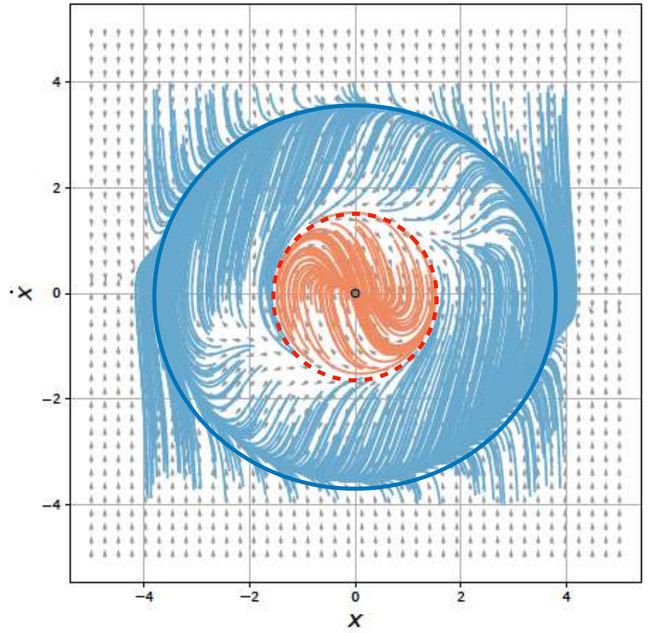
  ↪ déterminer la **séparatrice**, dans l'espace des phases : calcul par retournement temporel ou continuation

Superposition avec le portrait de phases :

- une solution périodique stable
- une solution d'équilibre stable
- une solution périodique instable

Séparatrice : un objet 1D sépare l'espace des phases 2D en deux parties séparées





Déterminer la séparatrice entre bassins d'attraction

Que se passe-t-il en plus grande dimension ?

Exemple : modèle de Lokta-Volterra de compétition entre deux espèces

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$
$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

x(t) : population de lapins
y(t) : population de moutons

Four fixed points (equilibrium solutions) : $(x, y) = (0,0)$; $(x, y) = (0,2)$; $(x, y) = (3,0)$; $(x, y) = (1,1)$

Déterminer la séparatrice entre bassins d'attraction

Que se passe-t-il en plus grande dimension ?

Exemple : modèle de Lokta-Volterra de compétition entre deux espèces

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$
$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

x(t) : population de lapins
y(t) : population de moutons

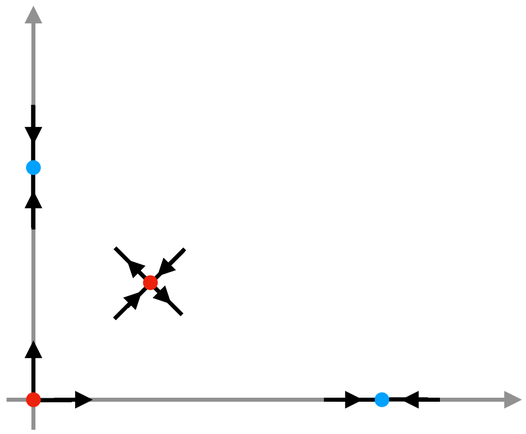
Four fixed points (equilibrium solutions) : $(x, y) = (0,0)$; $(x, y) = (0,2)$; $(x, y) = (3,0)$; $(x, y) = (1,1)$

instable → 2 directions propres instables

stables

instable → 1 direction propre instable, 1 direction propre stable

Portrait de phase :



Déterminer la séparatrice entre bassins d'attraction

Que se passe-t-il en plus grande dimension ?

Exemple : modèle de Lokta-Volterra de compétition entre deux espèces

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$
$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

x(t) : population de lapins
y(t) : population de moutons

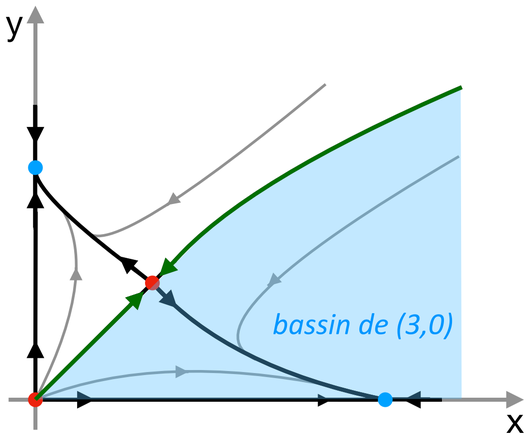
Four fixed points (equilibrium solutions) : $(x, y) = (0,0)$; $(x, y) = (0,2)$; $(x, y) = (3,0)$; $(x, y) = (1,1)$

instable → 2 directions propres instables

stables

instable → 1 direction propre instable, 1 direction propre stable

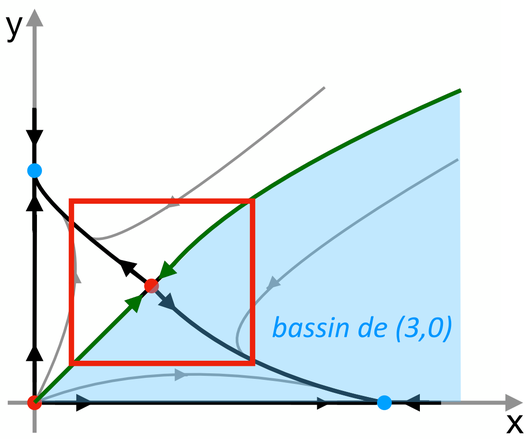
Portrait de phase :



Frontière entre bassins (séparatrice) :
Variété stable du point d'équilibre « saddle » (selle)

Variété (in)stable d'un point de type « saddle »
Ensemble des trajectoires qui convergent vers le point selle quand $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$

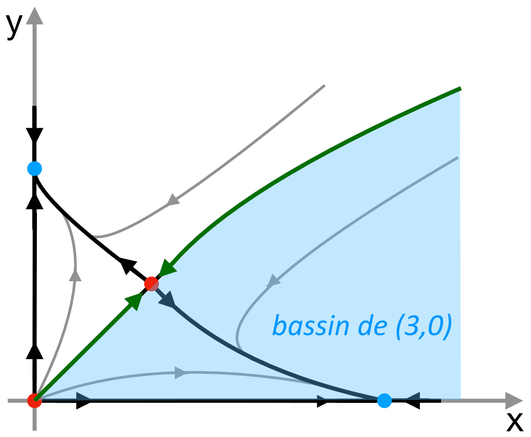
Calculer la séparatrice entre bassins d'attraction



- **1ère approche : Inversion du temps $(t \to -t)$ en simulation temporelle**
  - Inversion des directions stables et instables
  - Nécessite que la variété stable soit répulsive en temps direct (attractive en temps inversé)
    - ➡ Pas toujours le cas dans les systèmes de plus grande dimension

- **2ème approche : Continuation numérique**
  - Formulation par BVP (Boundary Value Problem)
  - Continuation numérique de trajectoires

Calculer la séparatrice entre bassins d'attraction

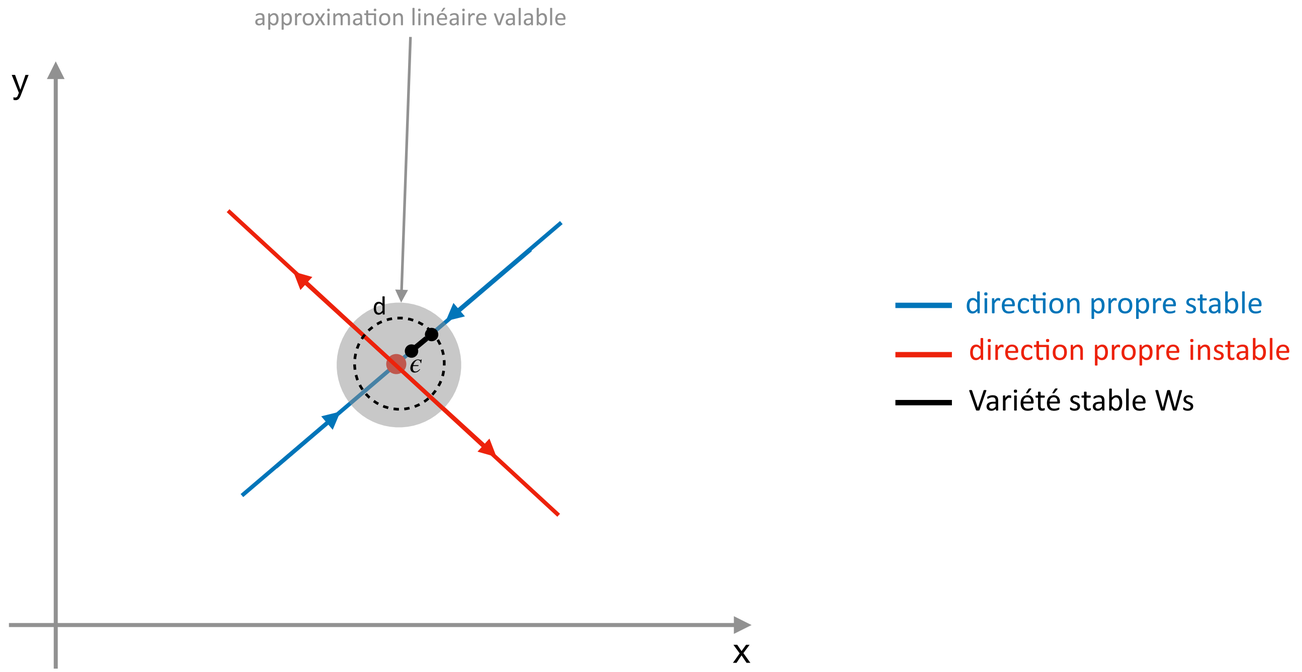


- **1ère approche : Inversion du temps $(t \to -t)$ en simulation temporelle**
  - Inversion des directions stables et instables
  - Nécessite que la variété stable soit répulsive en temps direct (attractive en temps inversé)
    - ➡ Pas toujours le cas dans les systèmes de plus grande dimension

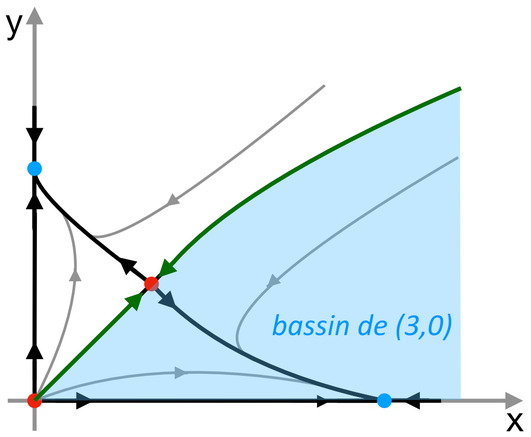
- **2ème approche : Continuation numérique**
  - Formulation par BVP (Boundary Value Problem)
  - Continuation numérique de trajectoires

En pratique

- Localement, le sous-espace propre est une bonne approximation de la variété : **1ère condition limite**
- **Deuxième condition limite** : distance géométrique *d* au point fixe
- **Continuation** sur d : génère la variété stable Ws



Calculer la séparatrice entre bassins d'attraction

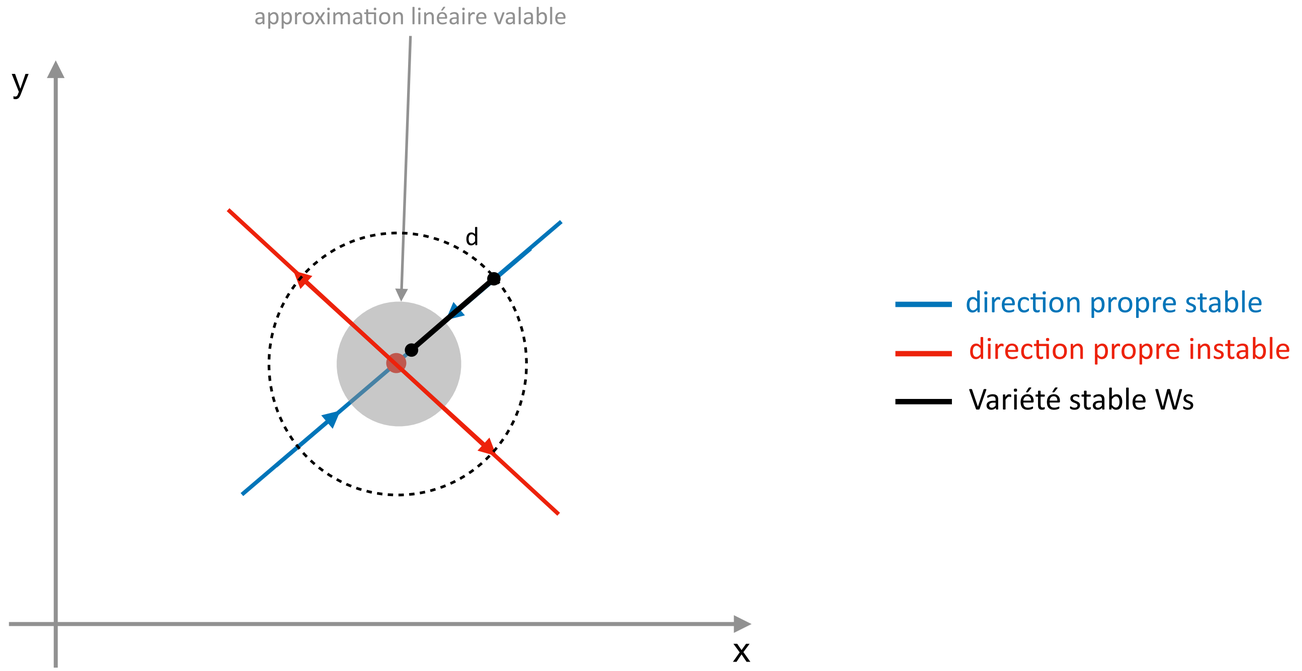


- **1ère approche : Inversion du temps $(t \to -t)$ en simulation temporelle**
  - Inversion des directions stables et instables
  - Nécessite que la variété stable soit répulsive en temps direct (attractive en temps inversé)
    - ➡ Pas toujours le cas dans les systèmes de plus grande dimension

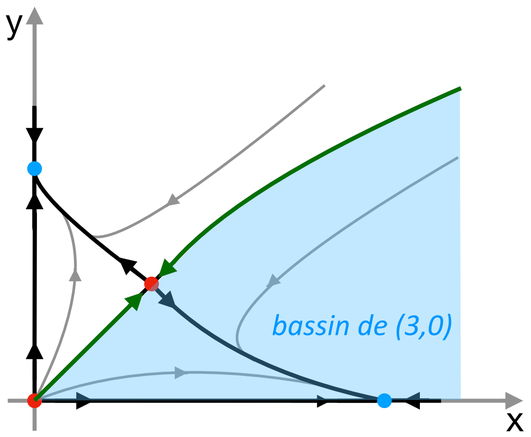
- **2ème approche : Continuation numérique**
  - Formulation par BVP (Boundary Value Problem)
  - Continuation numérique de trajectoires

En pratique

- Localement, le sous-espace propre est une bonne approximation de la variété : **1ère condition limite**
- **Deuxième condition limite** : distance géométrique *d* au point fixe
- **Continuation** sur d : génère la variété stable Ws



Calculer la séparatrice entre bassins d'attraction

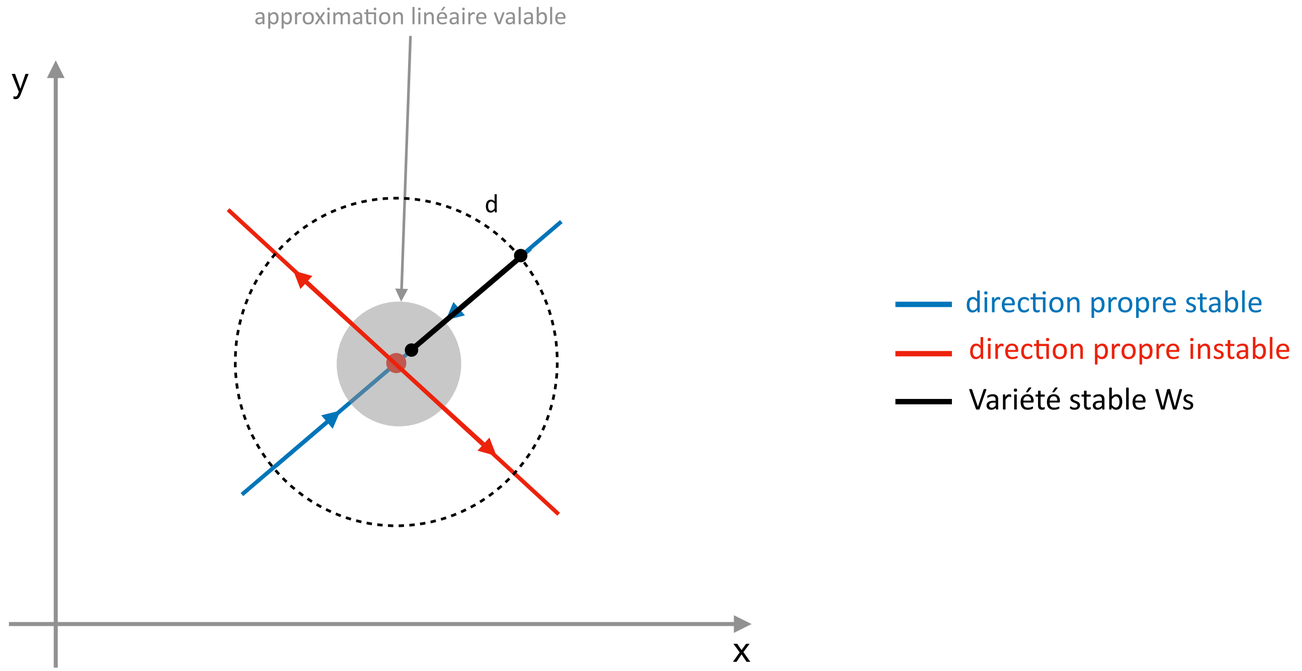


- **1ère approche : Inversion du temps $(t \to -t)$ en simulation temporelle**
  - Inversion des directions stables et instables
  - Nécessite que la variété stable soit répulsive en temps direct (attractive en temps inversé)
    - ➡ Pas toujours le cas dans les systèmes de plus grande dimension

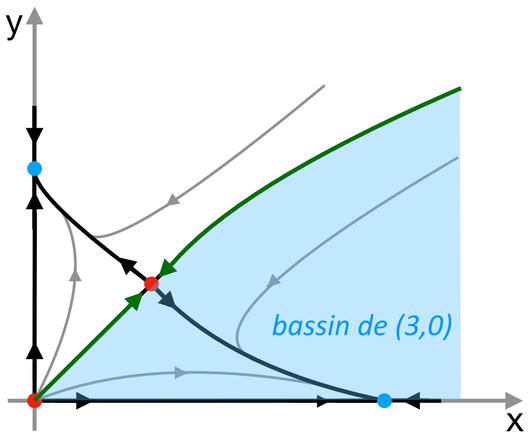
- **2ème approche : Continuation numérique**
  - Formulation par BVP (Boundary Value Problem)
  - Continuation numérique de trajectoires

En pratique

- Localement, le sous-espace propre est une bonne approximation de la variété : **1ère condition limite**
- **Deuxième condition limite** : distance géométrique *d* au point fixe
- **Continuation** sur d : génère la variété stable Ws



Calculer la séparatrice entre bassins d'attraction

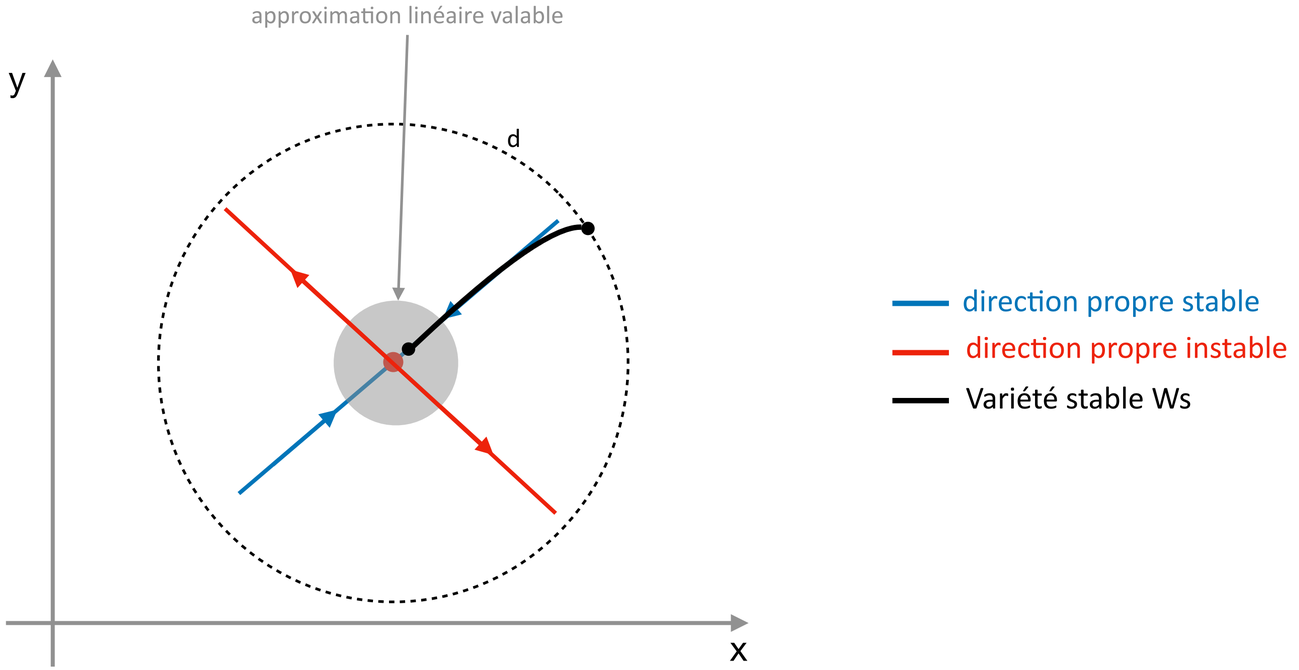


- **1ère approche : Inversion du temps $(t \to -t)$ en simulation temporelle**
  - Inversion des directions stables et instables
  - Nécessite que la variété stable soit répulsive en temps direct (attractive en temps inversé)
    - ➡ Pas toujours le cas dans les systèmes de plus grande dimension

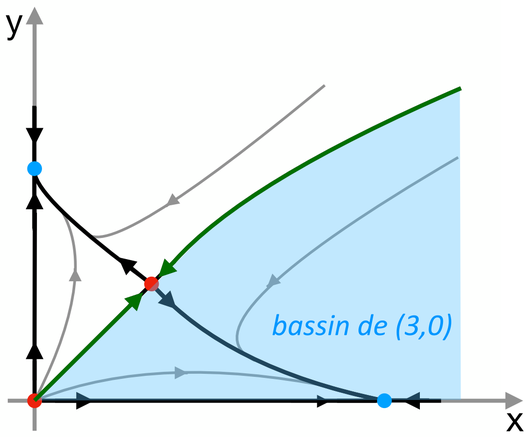
- **2ème approche : Continuation numérique**
  - Formulation par BVP (Boundary Value Problem)
  - Continuation numérique de trajectoires

En pratique

- Localement, le sous-espace propre est une bonne approximation de la variété : **1ère condition limite**
- **Deuxième condition limite** : distance géométrique *d* au point fixe
- **Continuation** sur d : génère la variété stable Ws



Calculer la séparatrice entre bassins d'attraction

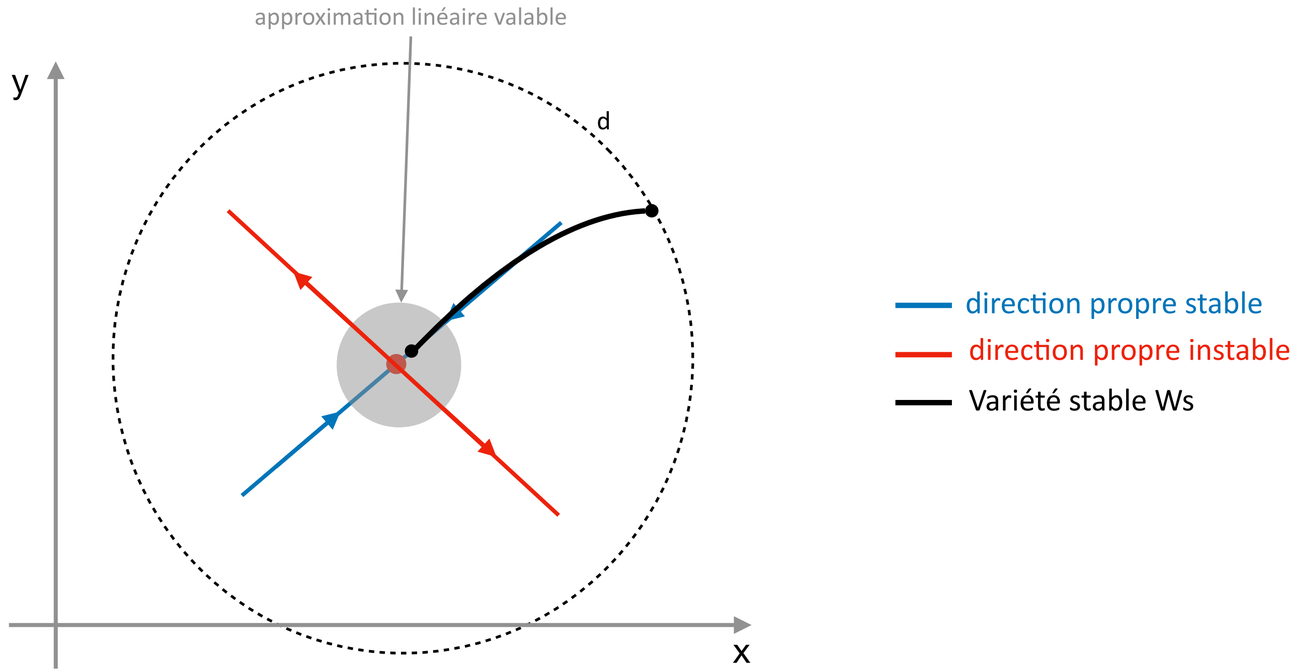


- **1ère approche : Inversion du temps $(t \to -t)$ en simulation temporelle**
  - Inversion des directions stables et instables
  - Nécessite que la variété stable soit répulsive en temps direct (attractive en temps inversé)
    - ➡ Pas toujours le cas dans les systèmes de plus grande dimension

- **2ème approche : Continuation numérique**
  - Formulation par BVP (Boundary Value Problem)
  - Continuation numérique de trajectoires

En pratique

- Localement, le sous-espace propre est une bonne approximation de la variété : **1ère condition limite**
- **Deuxième condition limite** : distance géométrique *d* au point fixe
- **Continuation** sur d : génère la variété stable Ws

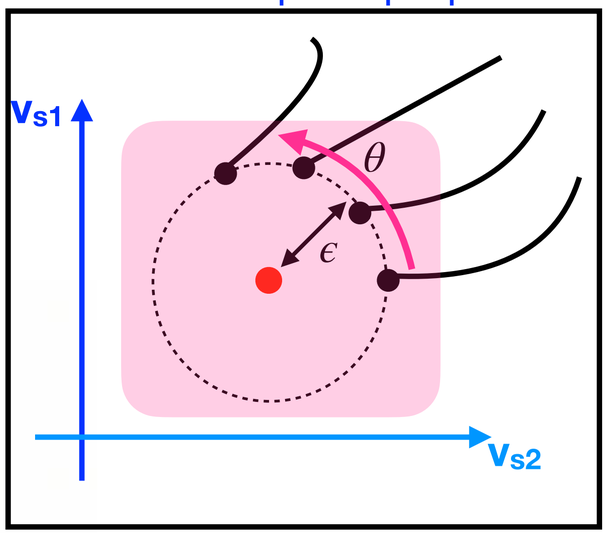


Continuation de variétés en plus grande dimension

Que se passe-t-il quand la séparatrice est de plus grande dimension ?

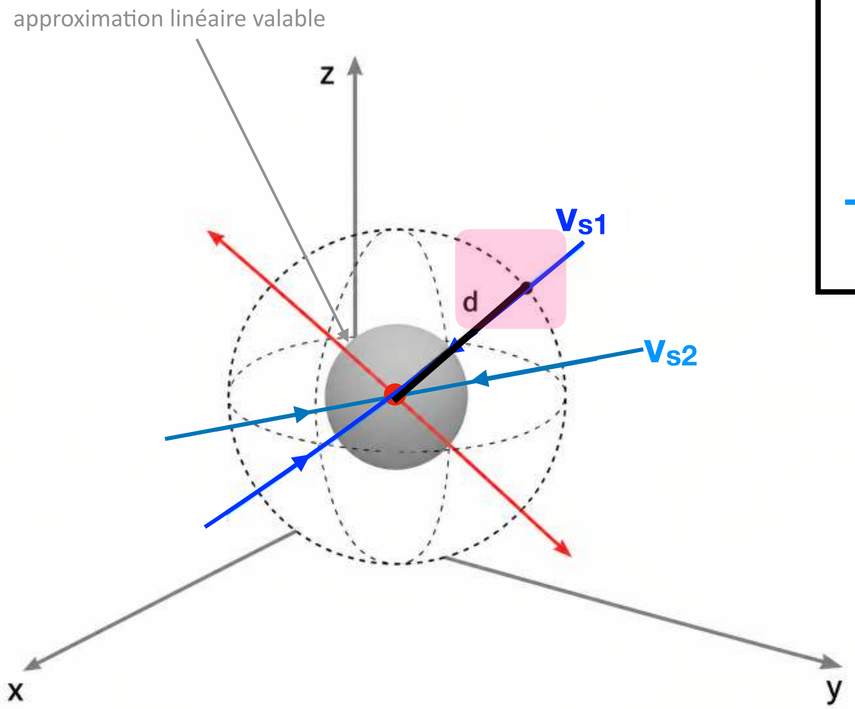
- Dans un espace 3D, une **séparatrice doit être 2D**
- ~~Trajectoire~~ → **collection de trajectoires** sur une surface
- Générées par un **sous espace-propre de dimension 2**

Dans le sous-espace propre stable



En pratique

- Point fixe avec 1 direction propre instable et 2 directions propres stables
- **Paramétrisation** du sous-espace propre stable par un **angle** θ
- **Première continuation** sur d : génère une première trajectoire de la variété stable Ws
- **Deuxième continuation** de cette trajectoire en fonction de θ pour **couvrir la variété stable**



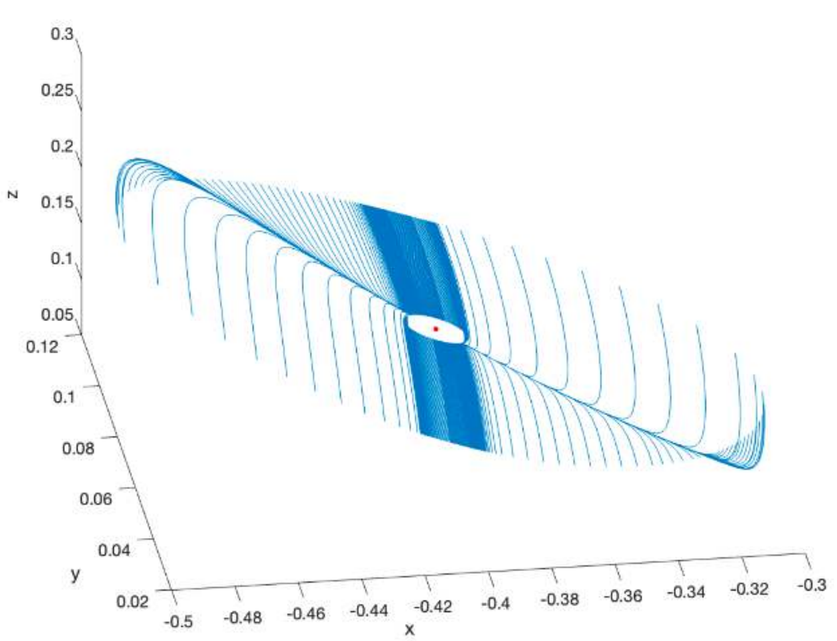
Démonstration dans CoCo

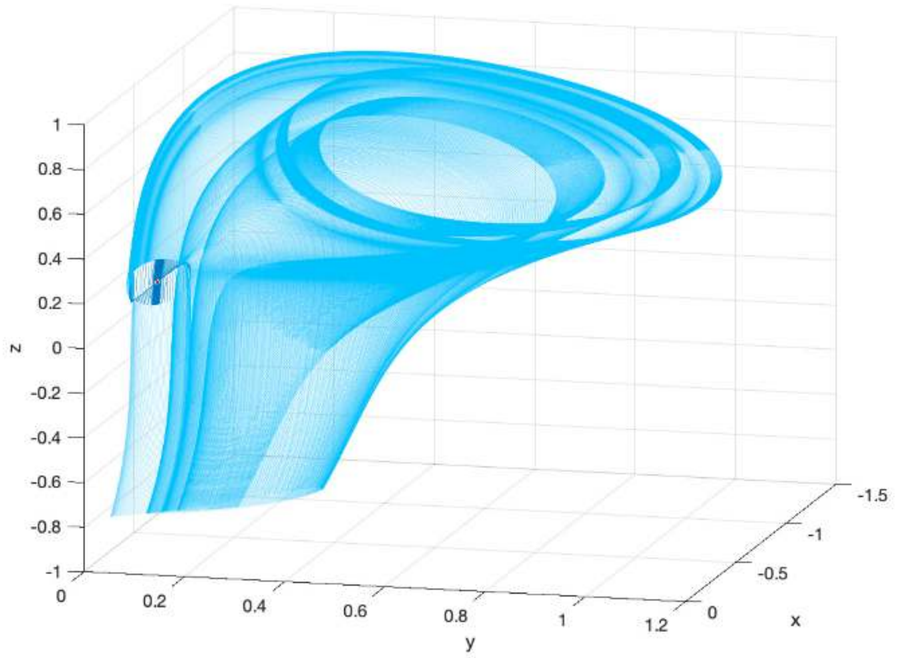
Système simple en 3D :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon x - y^3 + z^3;\\ \dot{y} &= y + x^3;\\ \dot{z} &= -z + x^2.\end{aligned}$$

⟶ **3 points d'équilibre**, dont **un avec deux valeurs propres stables** et **une instable**

Continuation de sa variété stable (2D)





À retenir sur les BA

Séparatrice de bassins

Variété stable d'une **solution instable**

⇒ **Présentation T. Passa demain (Modèle 4D)**

3. Basculement induit pas la vitesse de variation d’un paramètre

Brève revue bibliographique

Définition

Rate-induced tipping : le régime atteint dépend non seulement des valeurs des paramètres, mais aussi de la **vitesse** (ou **taux**) à laquelle ils varient. Trop vite (ou trop lentement), le système bascule ⇒ notion **taux critique** et **point de bascule**

Les précurseurs

1997

[1] Stocker & Schmittner

Climat : à CO_2 atmosphérique final égal, une hausse rapide arrête la circulation des courants atlantiques.

2008

[2] Scheffer et al.

Écologie : « hypothèse du taux critique », hausse rapide de la nourriture des proies (eau, nutriments), la population de proies explose et échappe au contrôle de prédateurs trop lents.

Fondements mathématiques

2012

[3] Ashwin et al.

Définir. Distingue le R-tipping des basculements par bifurcation (ou par bruit : au-delà d'un taux critique, le système décroche de l'état de base, pourtant stable sur toute la plage du forçage.

2018

[4] Alkhayuon & Ashwin

Au-delà des équilibres. R-tipping depuis un cycle limite : l'issue dépend de la phase (basculement partiel).

2023

[5] Wieczorek, Xie & Ashwin

Cadre général. Le taux critique correspond à une **connexion hétérocline**, entre l'état initial et l'état final.

En mécanique

2017

[6] Tony et al.

Première mesure du R-tipping, en laboratoire : système thermoacoustique.

2024

[7] Bergeot, Terrien & Vergez

Instrument à anche : une séparatrice prédit si la note sort selon le geste du musicien

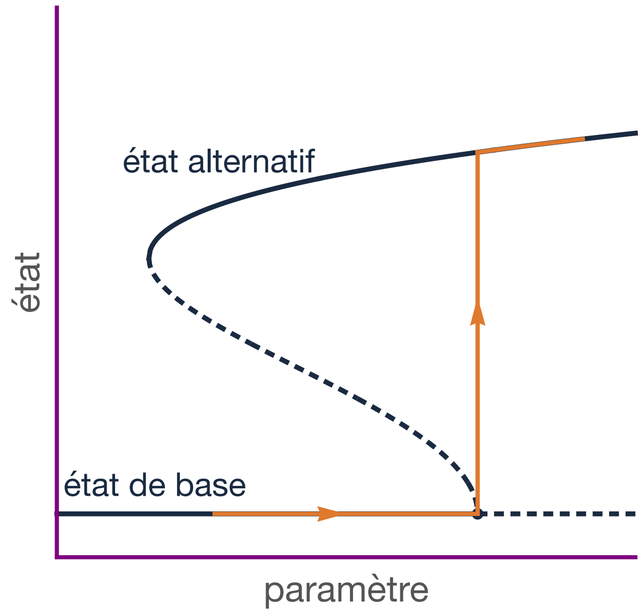
[1] Stocker & Schmittner, Nature 388 (1997) — doi:10.1038/42224
[2] Scheffer et al., Ecosystems 11 (2008) — doi:10.1007/s10021-007-9118-8
[3] Ashwin et al., Phil. Trans. R. Soc. A 370 (2012) — doi:10.1098/rsta.2011.0306
[4] Alkhayuon & Ashwin, Chaos 28 (2018) — doi:10.1063/1.5000418
[5] Wieczorek, Xie & Ashwin, Nonlinearity 36 (2023) — doi:10.1088/1361-6544/accb37
[6] Tony et al., Sci. Rep. 7 (2017) — doi:10.1038/s41598-017-05814-y
[7] Bergeot, Terrien & Vergez, Chaos 34 (2024) — doi:10.1063/5.0190512

Les différents types de basculement

[Ashwin et al. (2012). *Phil. Trans. R. Soc. A*]

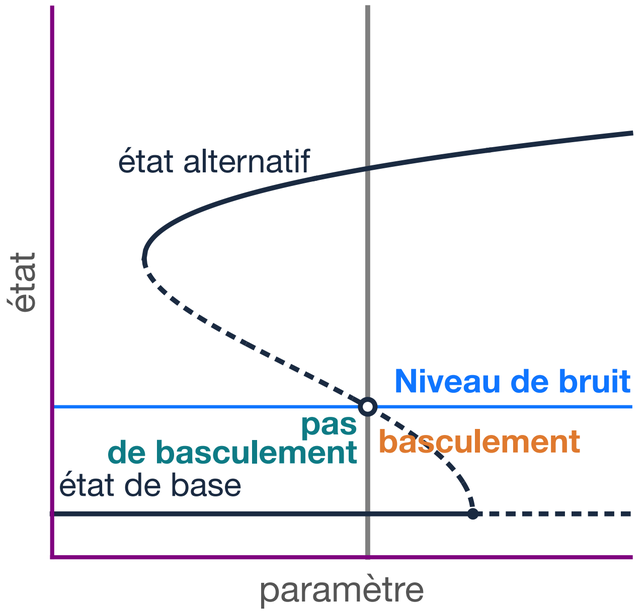
Exemple : bifurcations **fourche sous-critique** (FSC) et **nœud-col** (NC)

B–tipping



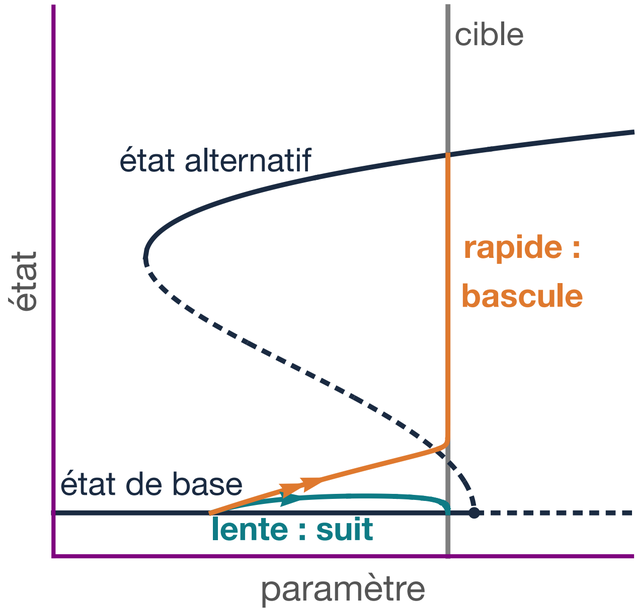
Paramètre constant

N–tipping



Paramètre constant

R–tipping



Paramètre variable

Exemple 1 — Modèle de saxophone à un mode (1)

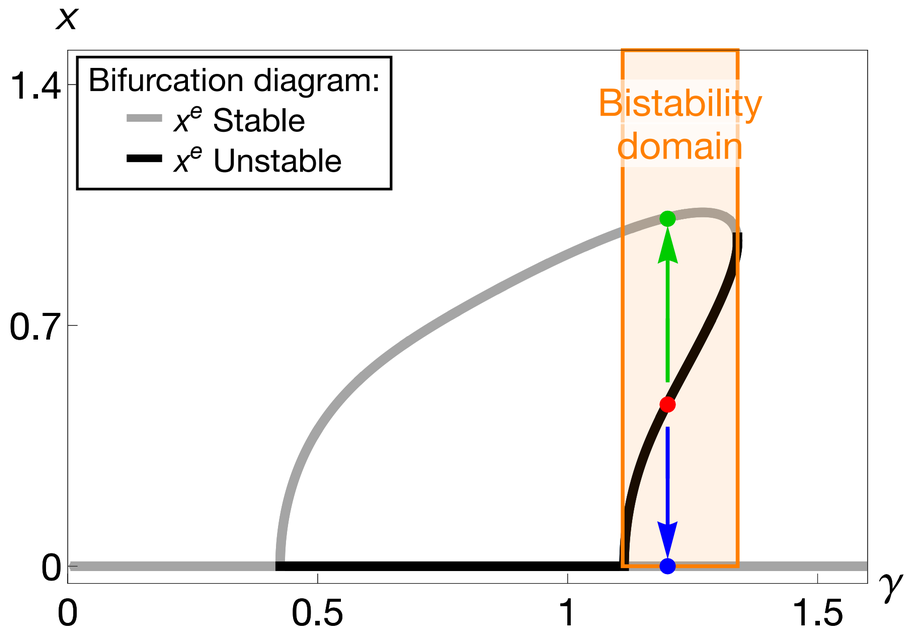
Le modèle (**adimensionné** et **moyenné**) :

$$\dot{x} = f(x, \gamma), \quad X = x \in \mathbb{R}$$

- x : amplitude de la pression acoustique dans le bec
- γ : pression dans la bouche du musicien

Silence : $x = 0$
Note : $x =$ constante

Diagramme de bifurcation ($\gamma =$ constante) **:**
- Branches d'**équilibres stables**
- Branches d'**équilibres instables**



Zone de **bistabilité** entre silence et note

- Équilibre instable : **séparatrice** des bassins d'attraction

Transitoires d'attaque

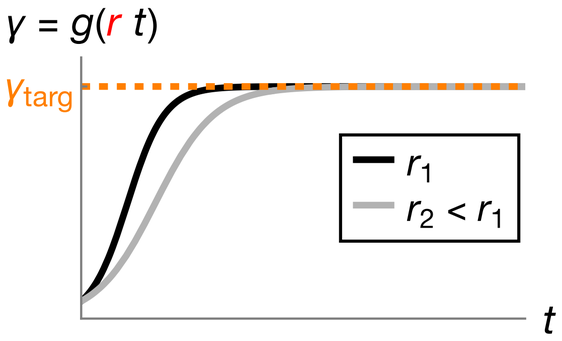
Quel régime atteint quand γ augmente et sature dans la zone de bistabilité ?

Exemple 1 — Modèle de saxophone à un mode (2)

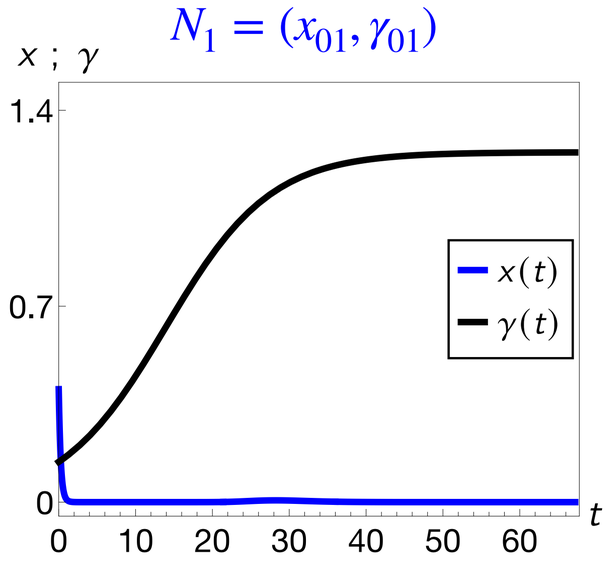
Le modèle avec $\gamma = g(rt)$:

$$\dot{x} = f(x, g(rt))$$

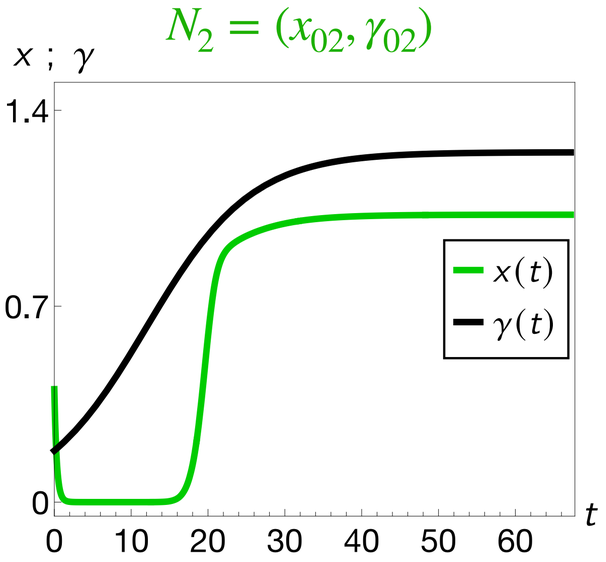
r : **taux de variation** de γ



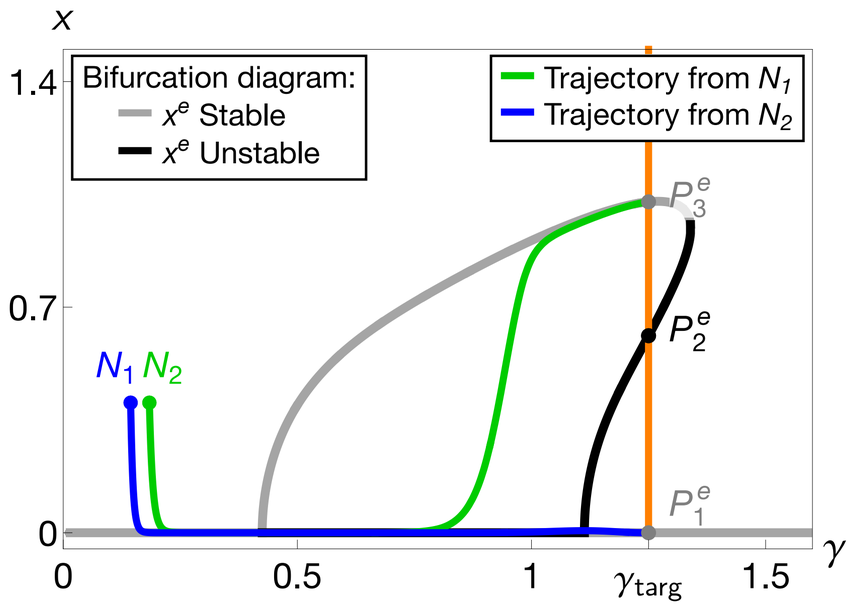
Exemple 1 : taux r fixé et deux conditions initiales différentes N_1 et N_2



Pas de basculement



Basculement

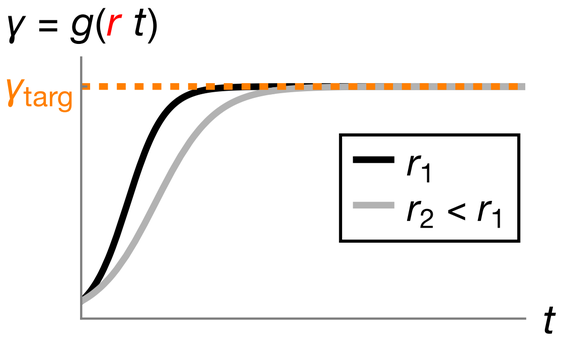


Exemple 1 — Modèle de saxophone à un mode (3)

Le modèle avec $\gamma = g(rt)$:

$$\dot{x} = f(x, g(rt))$$

r : **taux de variation** de γ

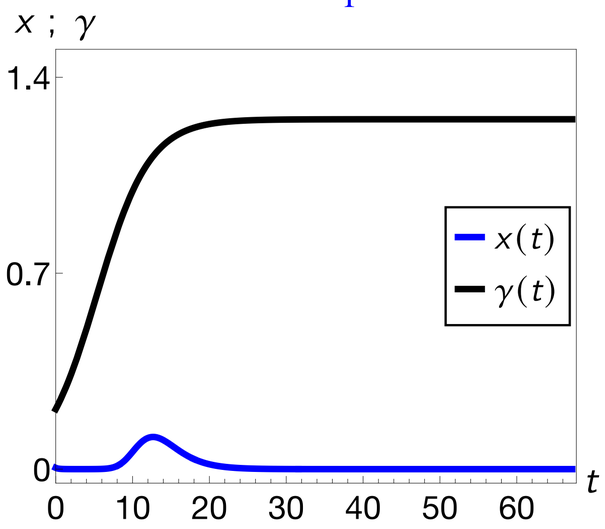


Exemple 2 : condition initiale fixée • et deux taux différents r_1 et r_2

Rate-induced tipping

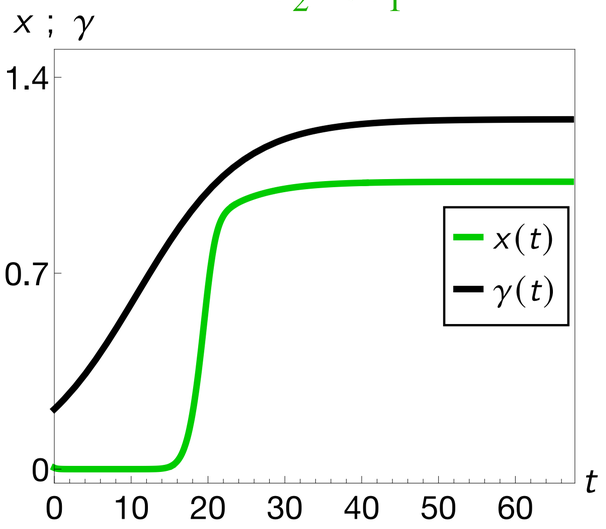
Le régime atteint dépend de la valeur du taux r

$r = r_1$

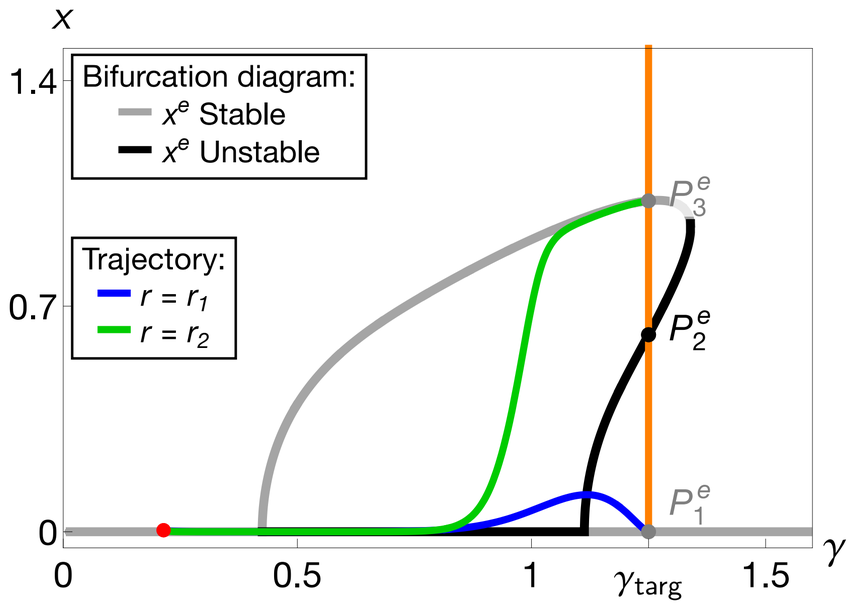


Pas de basculement

$r = r_2 < r_1$

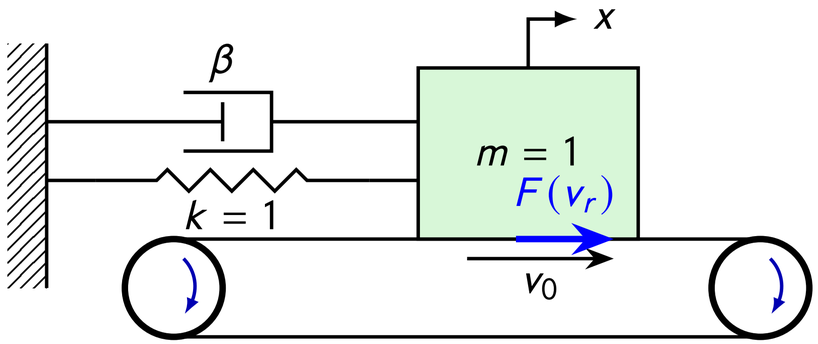


Basculement



Exemple 2 — Modèle de corde frottée, oscillateur stick-slip (1)

Masse-ressort-amortisseur sur un **tapis roulant :**



- $v_r = \dot{x} - v_0$: **vitesse relative** entre la masse et le tapis
- **Équation du mouvement de la masse (sans dimension) :**

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = F(v_r), \quad X = (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$$

- **Loi de frottement** (non régulière) :

$$F(v_r) = \begin{cases} -\mathrm{sgn}(v_r)\,\mu(v_r) & \text{if } v_r \neq 0 \text{ (slip)} \\ \in [-\mu_s, \mu_s] & \text{if } v_r = 0 \text{ (stick)} \end{cases}$$

avec :

- $\mu(v_r)$ **fonction non régulière** de v_r (décroissante pour $v_r > 0$)
- μ_s et μ_d: coefficients de frottement **statique** et **dynamique**

- **Loi de frottement régularisée** :

$$F_{\mathrm{reg}}(v_r) = -\frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 + \eta}}\mu_{\mathrm{reg}}(v_r)$$

Avec :

- $\mu_{\mathrm{reg}}(v_r)$: régularisation de $\mu(v_r)$
- η: paramètre de régularisation

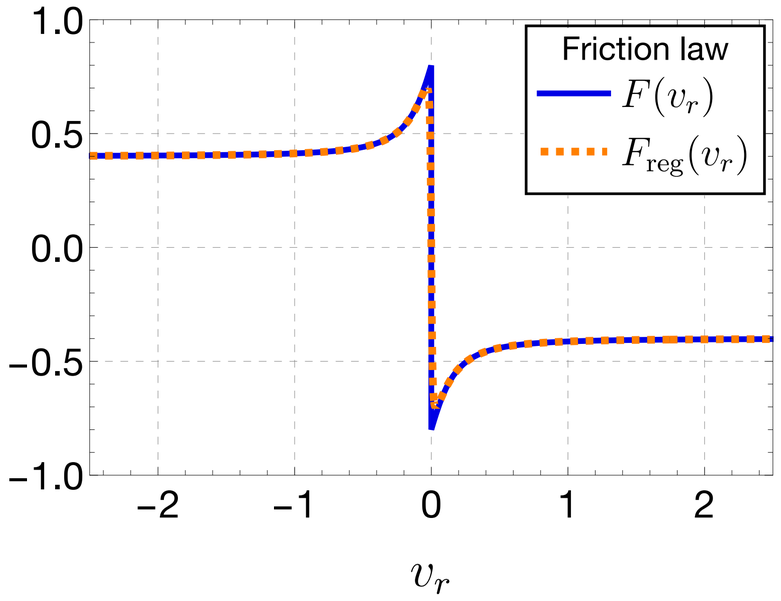


Figure. Loi de frottement : non régulière et régulière

Exemple 2 — Modèle de corde frottée, oscillateur stick-slip (2)

Pour $v_0 =$ constante on calcule:

- Les **solutions** (équilibres ou solutions périodiques)
- La **stabilité** de ces solutions

Le **diagramme de bifurcation** représente ces solutions et leur stabilité, en fonction du paramètre v_0

Zone de bistabilité : entre équilibre et solution périodique

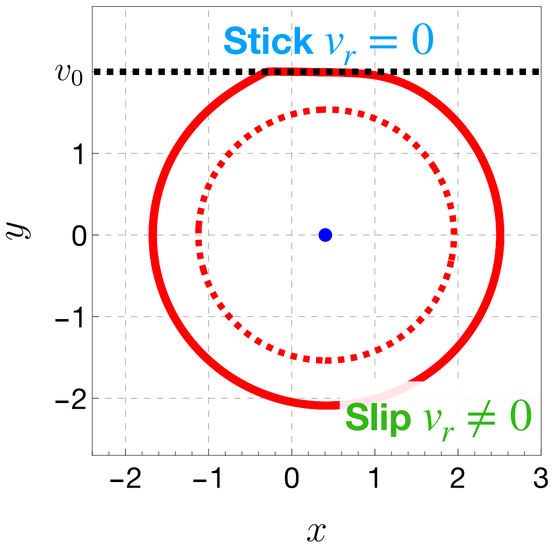
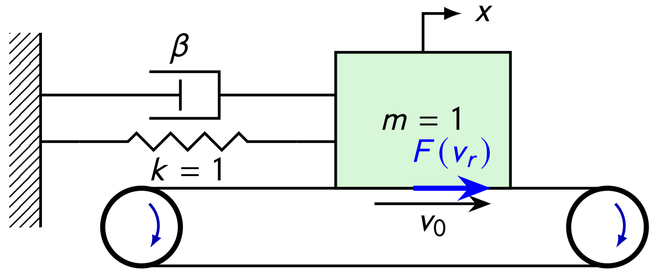


Figure. Représentation dans l'espace d'état $(x, \dot{x} = y)$ pour $v_0 = 2$



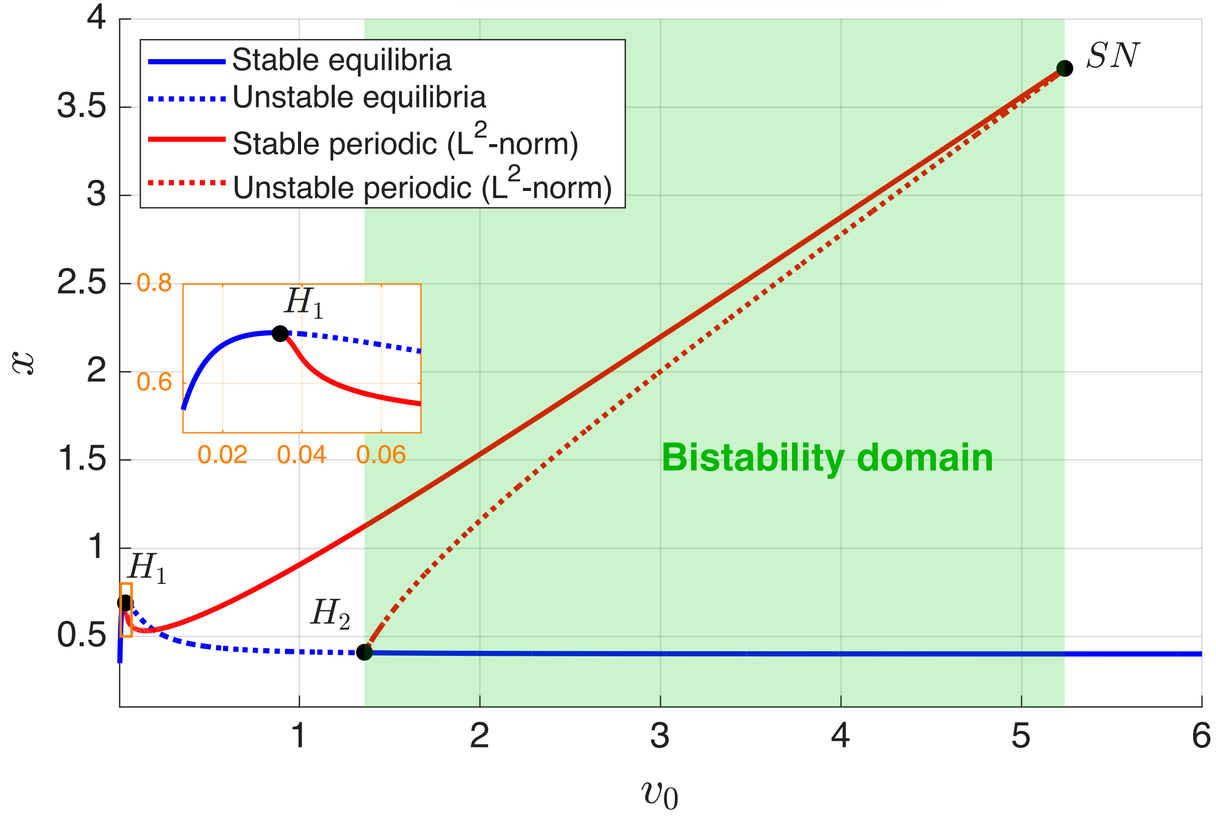
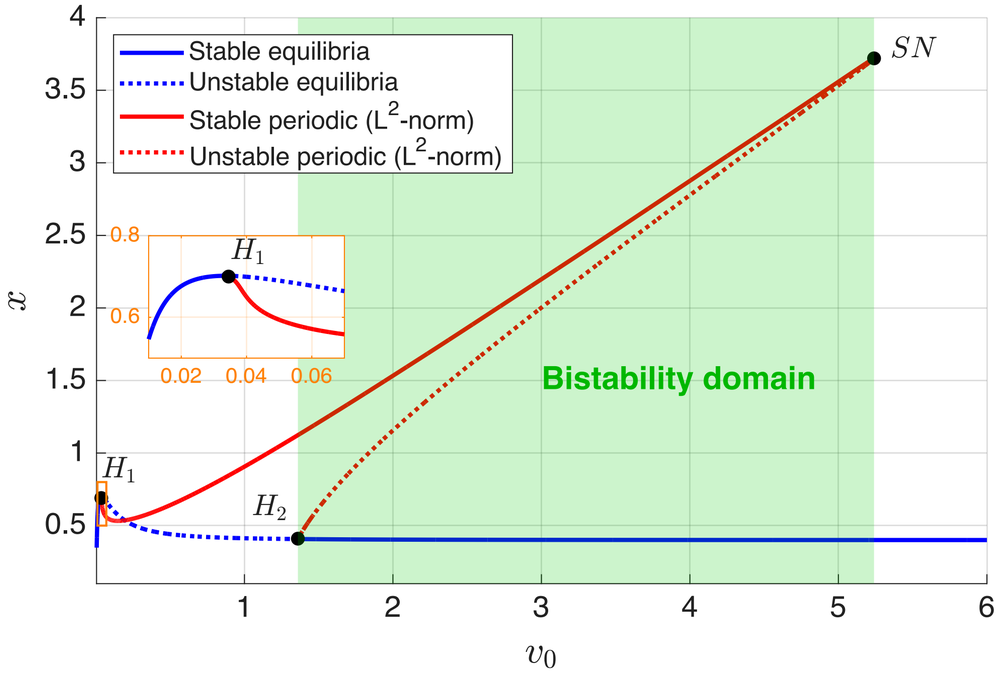


Figure. Diagramme de bifurcation de l'oscillateur stick-slip, généré à l'aide du logiciel MANLAB (v4.2.3)

Exemple 2 — Modèle de corde frottée, oscillateur stick-slip (3)

Bassin d'attraction (BA) : pour une solution stable donnée, le BA est l'ensemble des conditions initiales qui mènent à cette solution.



Séparatrice (S) : frontière, dans l'espace des états $(x, \dot{x} = y)$, entre deux bassins d'attraction

Ici : S = **solution périodique**

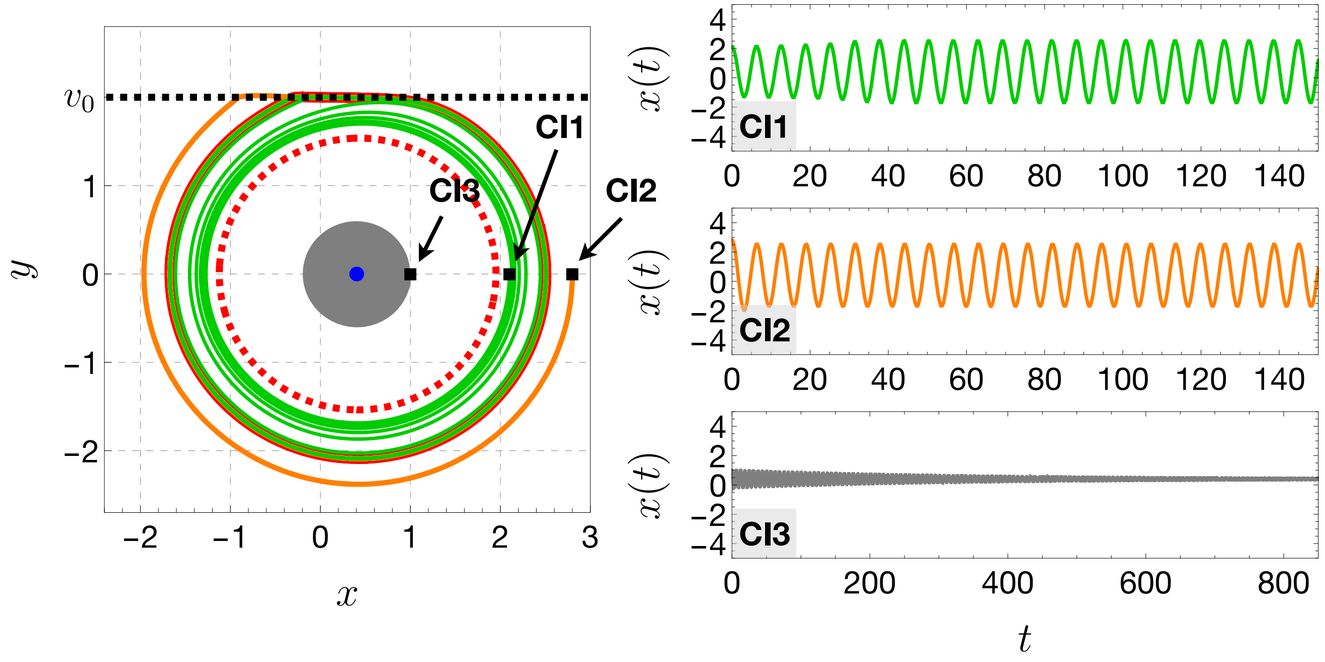


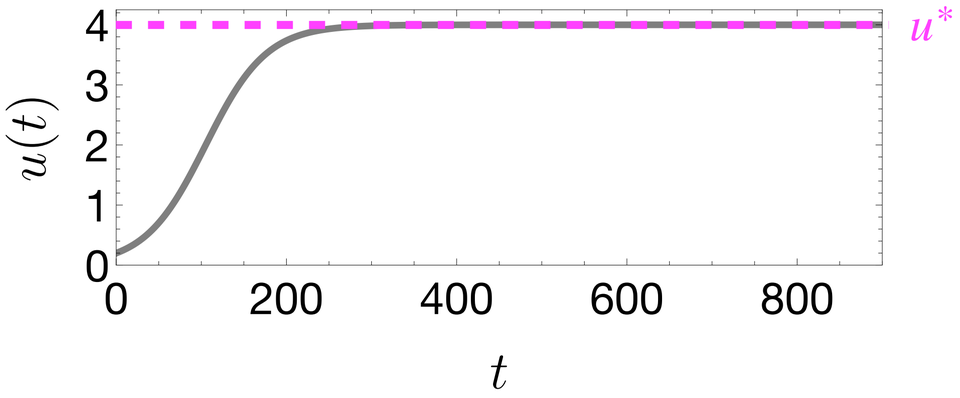
Figure. Simulations numériques pour $v_0 = 2$ et trois conditions initiales : (a) dans l'espace d'état $(x, \dot{x})$ et (b) en fonctions du temps.

Exemple 2 — Modèle de corde frottée, oscillateur stick-slip (4)

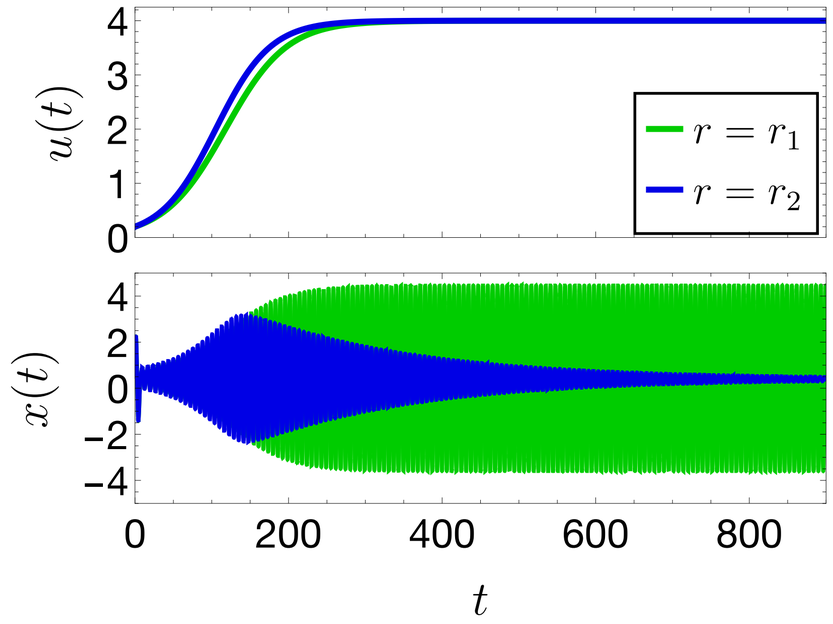
Vitesse du tapis variable dans le temps $v_0 = u(rt)$:

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = F_{\text{reg}}(\dot{x} - u(rt))$$

avec r le **taux de variation** et u^* la **valeur cible** de u (**dans la zone de bistabilité**)



- Exemples de simulations temporelles avec **deux valeurs légèrement différentes de** r (avec $r_1 < r_2$)



Rate-induced tipping

Exemple 3 — Modèle de saxophone à deux modes

Le modèle :

$$\dot{X} = f(X, g(rt)), \quad X \in \mathbb{R}^4$$

- $X = (p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2)$: coordonnées modales de p

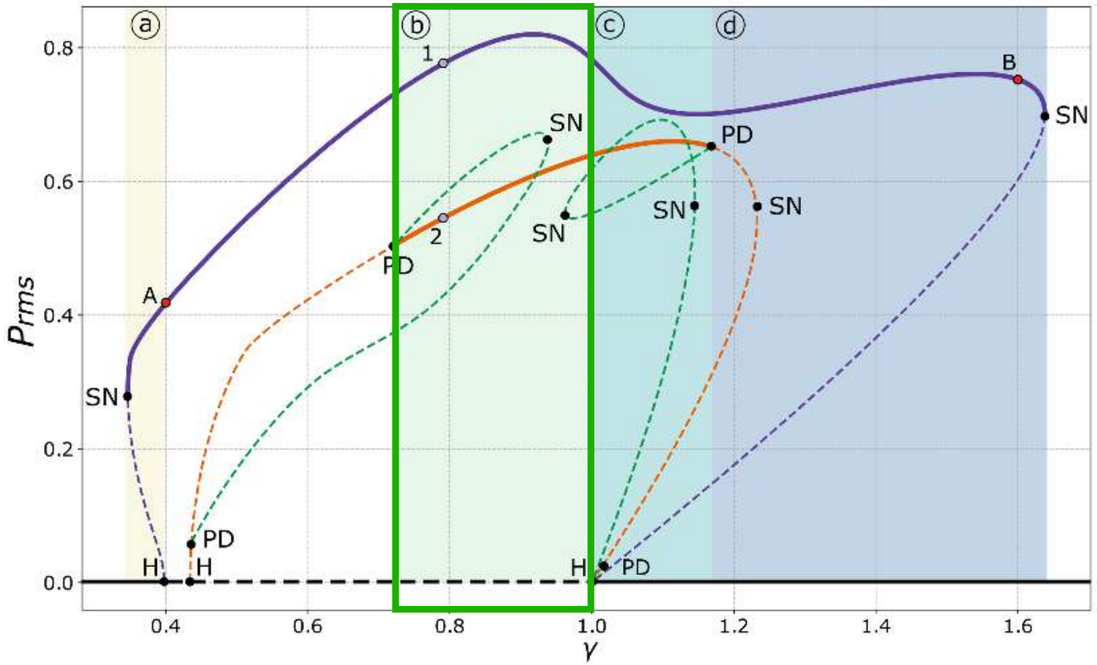
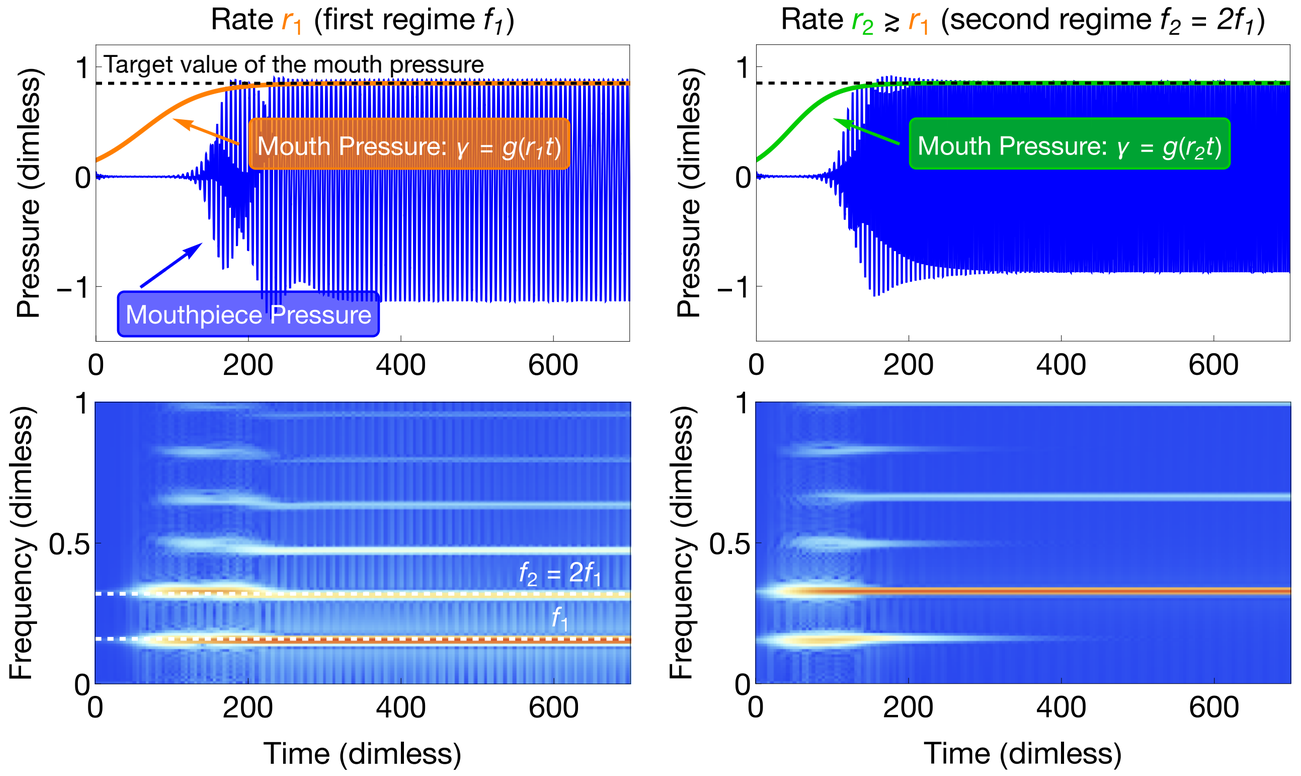


Figure. Diagramme de bifurcation d'un modèle de saxophone à deux modes. [Passa *et al.* (2026), JSV]

Rate-induced tipping de changement de registre :

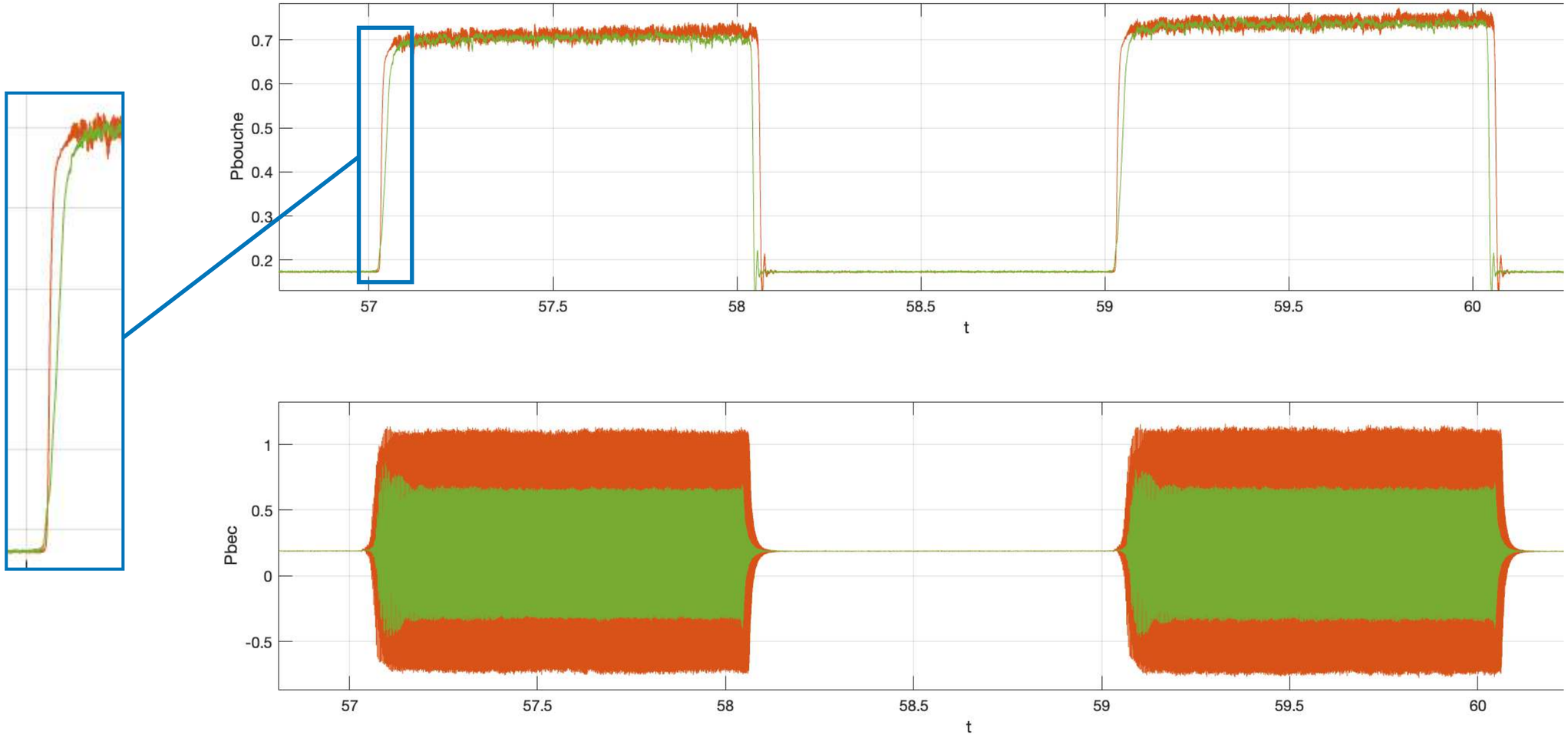


Premier registre f_1 (note souhaité)

Second registre $f_2 = 2f_1$ (octave de la note souhaité)

Zone de **bistabilité entre les deux registres**

Exemple 4 — R-tipping mesuré sur une flûte à bec



Doigté de sol grave

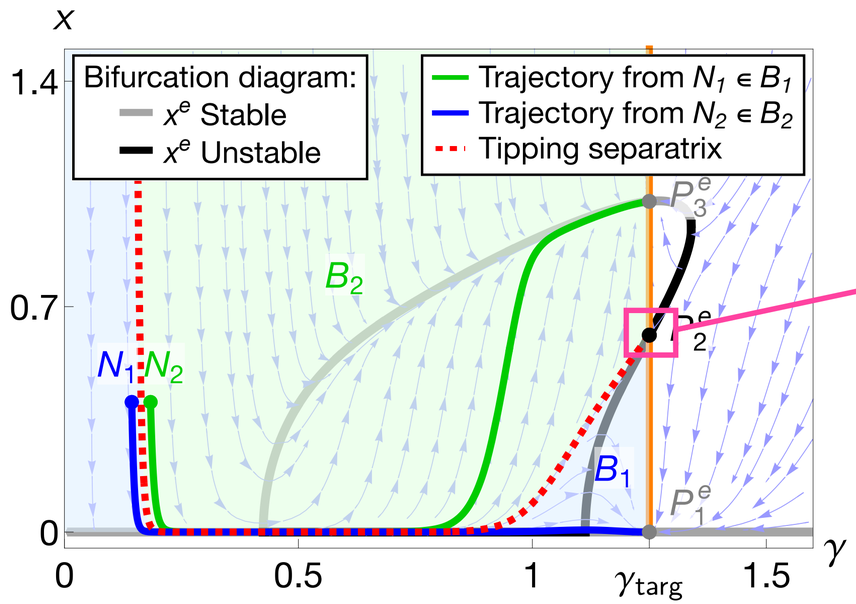
Note atteinte :

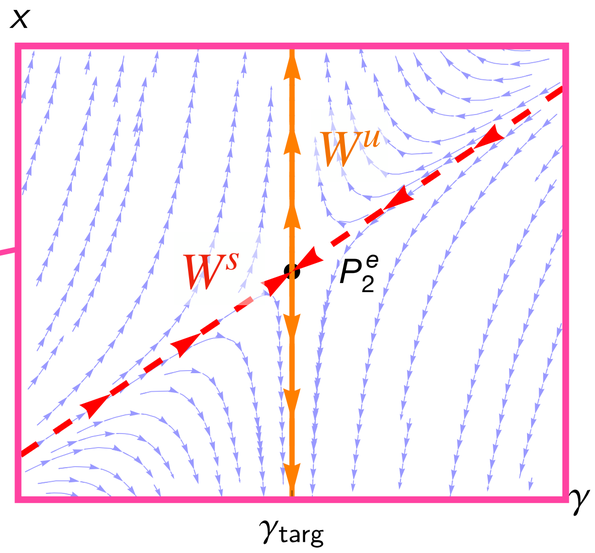
3e registre :
Ré aigu
Octave + quinte

4e registre :
Sol aigu
Deux octaves

Mesures effectuées par Soizic Terrien pendant sa thèse : *Instruments de la famille des flûtes : analyse des transitions entre régimes*, 2014, LMA, Marseille.

Retour sur l'exemple 1 — Modèle de saxophone à un mode (1)





P_2^e est un équilibre de type **selle** du système augmenté :

$$\dot{x} = f(x, \gamma)$$
$$\dot{\gamma} = r\, h(\gamma)$$

avec $g(rt)$ solution de $\dot{\gamma} = r\, h(\gamma)$ et $h(\gamma_{\text{targ}}) = 0$.

— variété **instable** W^u

- - - - variété **stable** W^s

Condition initiale $\in B_1$: pas de basculement

Condition initiale $\in B_2$: basculement

Variété stable W^s de P_2^e : **séparatrice de basculement**

Méthode de calcul de la séparatrice : retournement temporel. Possible car W^s **attractive en temps inversé**

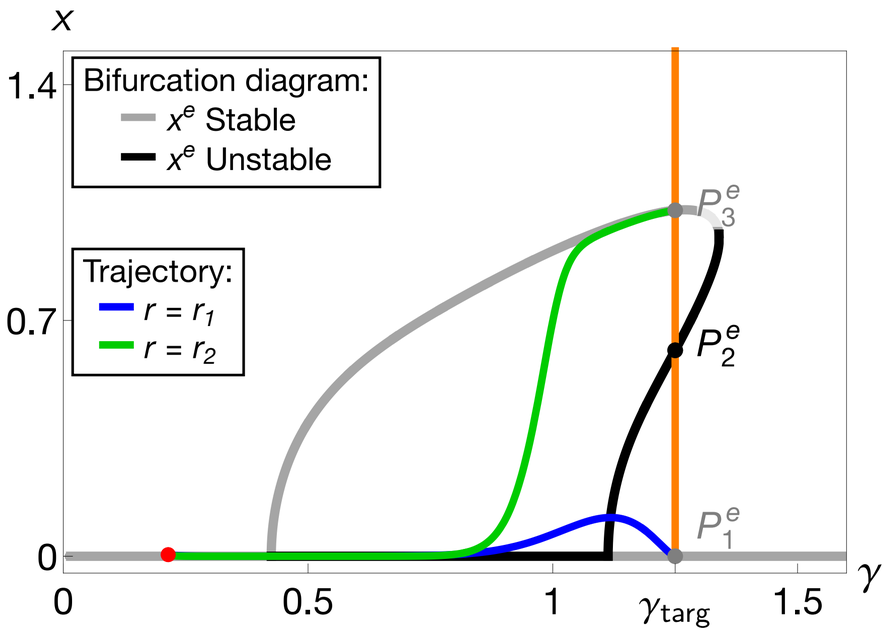
[Bergeot *et al.* (2024), Chaos][Bergeot *et al.* (2025), CFA]

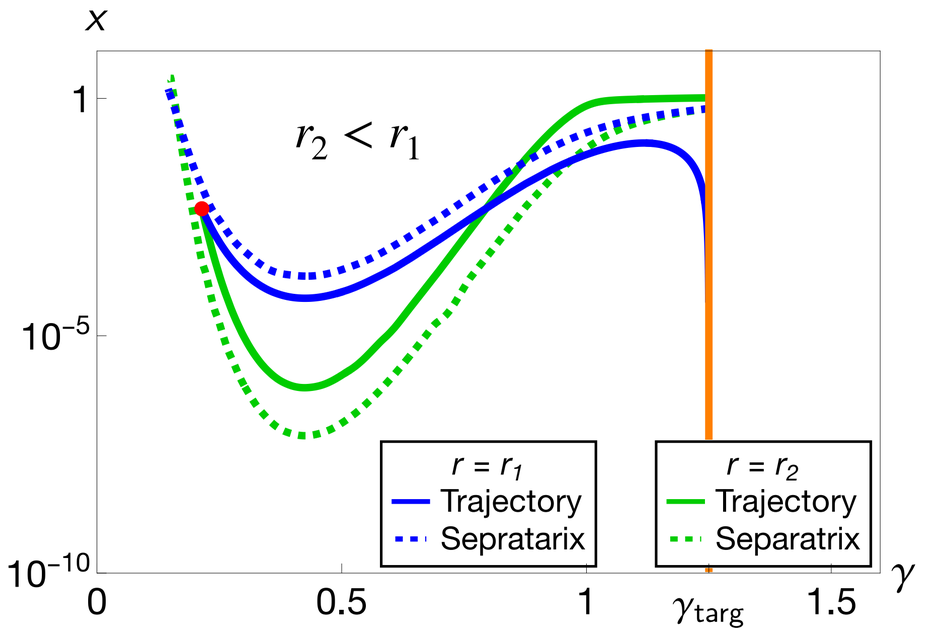
Retour sur l'exemple 1 — Modèle de saxophone à un mode (2)

Rate-induced tipping

La **séparatrice dépend du taux** r :

- Lorsque r augmente, une même condition initiale peut passer d'un côté à l'autre de la séparatrice
- Existence d'un taux critique r_c pour lequel la condition initiale est sur la séparatrice



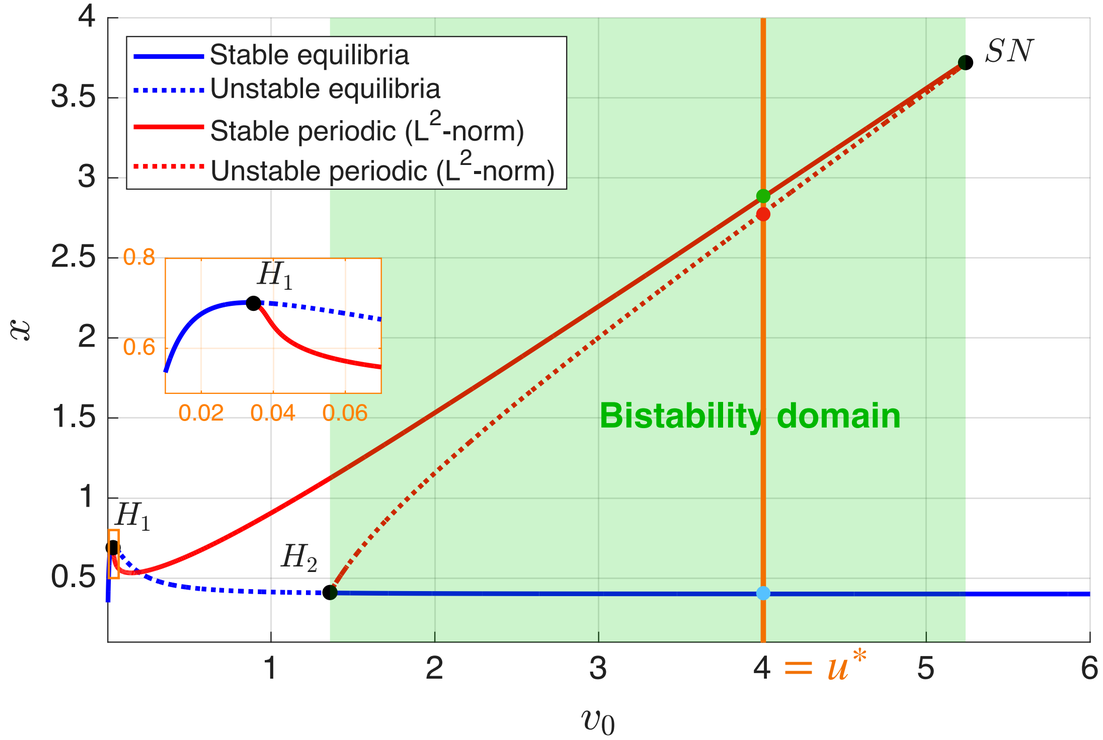


[Bergeot *et al.* (2024), Chaos][Bergeot *et al.* (2025), CFA]

Retour sur l'exemple 2 — Oscillateur stick-slip (1)

- The system with time-varying belt velocity has:
  - 1 stable equilibrium
  - 1 stable periodic solution p^s
  - 1 unstable periodic solution p^u

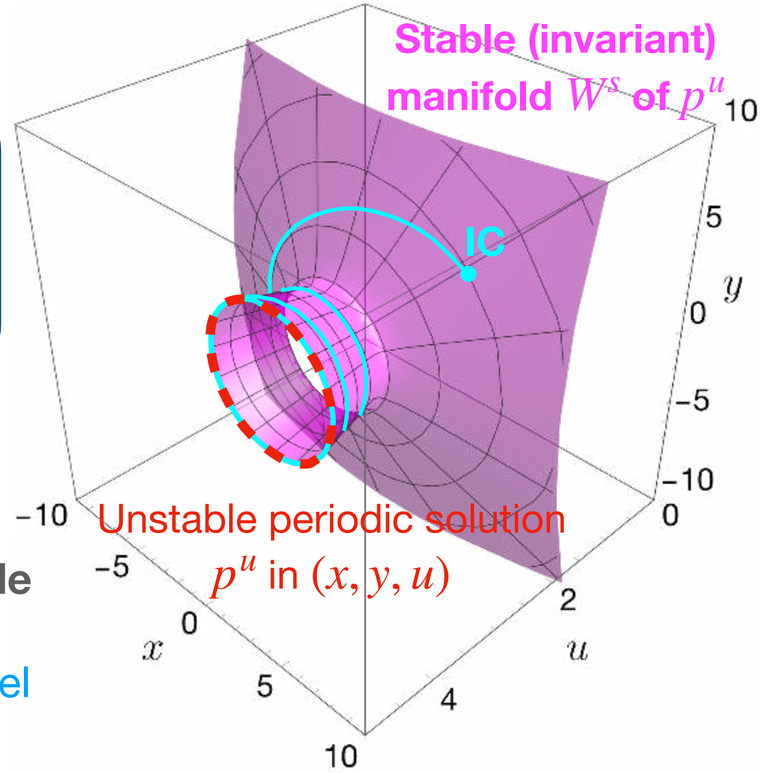
Corresponding to the **solutions with constant** $v_0 = u^*$



Stable (invariant) manifold W^s of p^u:

- **Two-dimensional surface** in the state space (x, y, u)
- **Family of solutions** which reaches p^u

A solution with IC $\in W^s \rightarrow p^u$ is the steady-state



Méthode de calcul de la séparatrice : retournement temporel

⇒ W^s acts as a **TIPPING SEPARATRIX**

[Bergeot *et al.* (2026), EURODINAME III]

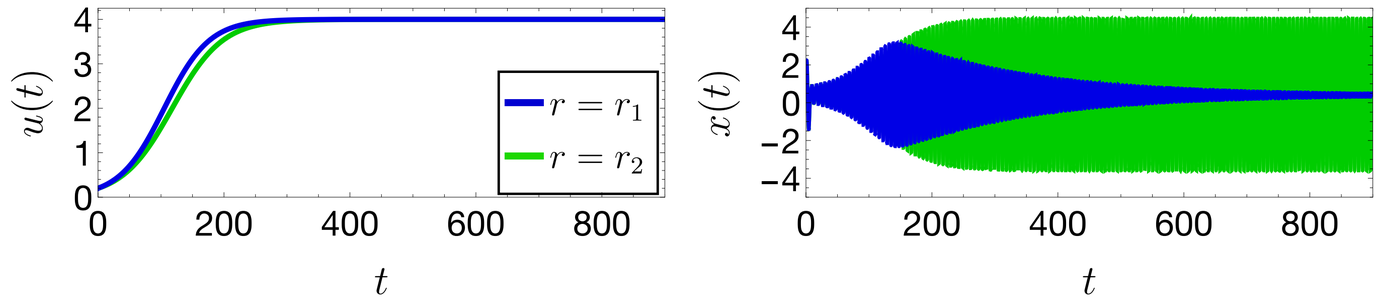
Retour sur l'exemple 2 — Oscillateur stick-slip (2)

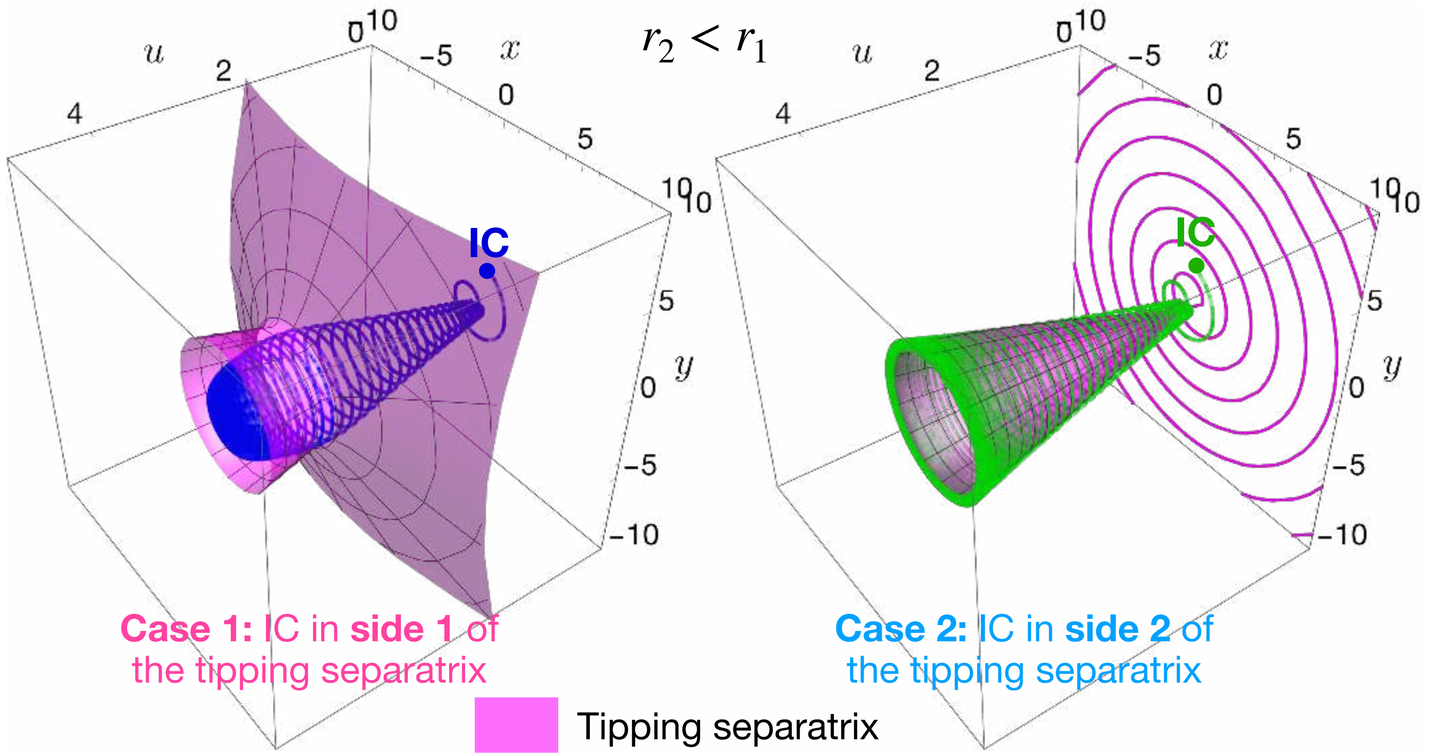
In the state space (x, y, u), a solution with an **initial condition (IC)**:

- (**Case 1**) **one side (side 1)** of the tipping separatrix**:** the equilibrium is reached
- (**Case 2**) **other side (side 2)** of the tipping separatrix**:** the periodic solution p^s is reached

Example— same initial conditions and **different rates of change r_1 and r_2:**

- $r = r_1$: **case 1**
- $r = r_2$: **case 2**





Case 1: IC in **side 1** of the tipping separatrix

Case 2: IC in **side 2** of the tipping separatrix

Tipping separatrix

[Bergeot *et al.* (2026), EURODINAME III]

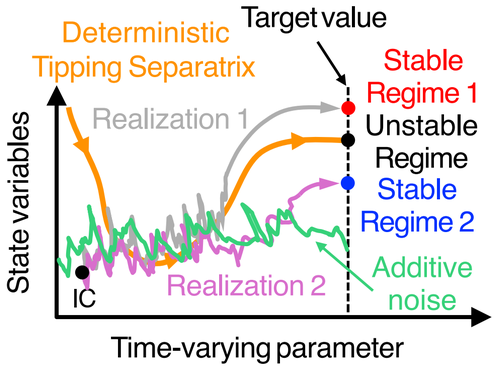
4. Conclusion & perspectives

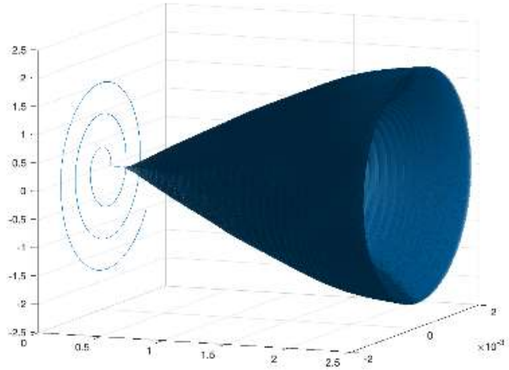
Conclusions

- **Le taux est aussi important que la valeur. Deux taux de variation de paramètres proches** peuvent entraîner le système vers **des états asymptotiques différents :** un comportement que **l'analyse classique de bifurcation de prédit pas**.
- **Un seul objet (variété) suffit.** La **séparatrice de basculement seule** caractérise la **réponse globale et permet la prédiction du basculement induit par le taux**.
- **Séparatrice de basculement — un outil prédictif.** Fournit un **diagnostic simple du basculement induit par le taux** dans des modèle d'instruments de musique, **extensible à d'autres systèmes mécaniques**.

Perspectives

- **Extension théorique.** Que devient de séparatrice à des systèmes de **dimension supérieure** présentant **tristabilité ou multistabilité plus complexe** ?
- **Influence du bruit.** La séparatrice peut correspondre à de très faibles amplitudes ; un bruit même minime peut alors la faire franchir, le **basculement devient probabiliste :** calcul de **probabilité de basculement**.
- **Défi numérique.** Développer des **méthodes avancées** pour le **calcul numérique précis des séparatrices de basculement dans des systèmes complexes**.
- **Défi de représentation.** En grande dimension la représentation géométrique des bassins devient impossible : déterminations de **descripteur de taille bassins**.
- **Validation expérimentale et lien avec le geste instrumental.** Confronter ces résultats à des mesures en laboratoire et à des gestes instrumentaux réalistes, pour éclairer les stratégies de jeu des musiciens





Projet ANR BEBOP

Beyond Classical Bifurcation Analysis: New Perspectives for Mechanical Engineering

Objectifs

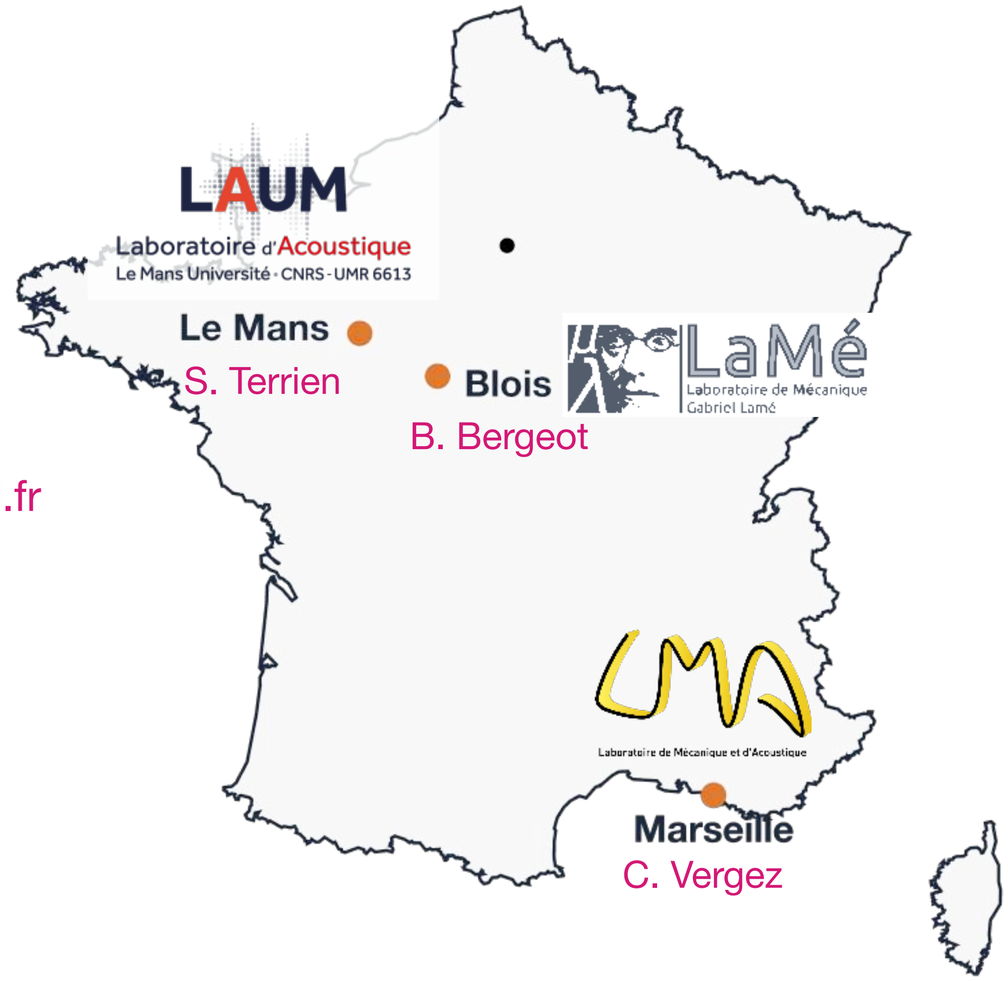
- **Explorer** ces perspectives à travers l'étude des **instruments de musique**.
- **Placer** les résultats obtenus dans un **contexte plus large en mécanique** et **au regard des problématiques actuelles en dynamique non linéaire**, au-delà des seules applications musicales.

Offres d'emplois

- **LaMé (Blois)**
  - **Stage Master 2**, 6 mois (2027)
  - **Thèse**, 36 mois (début oct. 2027)
  - **Post-doc**, 12 ou 18 mois (2028)
- **LAUM (Le Mans)**
  - **Stage Master 2**, 6 mois (2027)
  - **Thèse**, 36 mois (début oct. 2027)
- **LMA (Marseille)**
  - **Post-doc**, 24 mois (2028)

Contact :
baptiste.bergeot@insa-cvl.fr

Consortium



Merci de votre attention

Questions ?