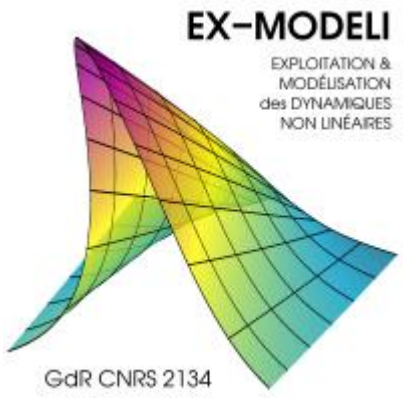
Méthodes d’apprentissage adaptatives pour la construction de métamodèles des réponses vibratoires non linéaires d’un rotor fissuré en milieu incertain

Erwan DEHILLERIN [1] [2], Enora DENIMAL GOY [1], Jean-Jacques SINOU [2]

[1] *Inria, Centre de Mathématiques APpliquées (CMAP), Ecole Polytechnique, IPP, Palaiseau*

[2] *Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), Ecole Centrale Lyon, Ecully*

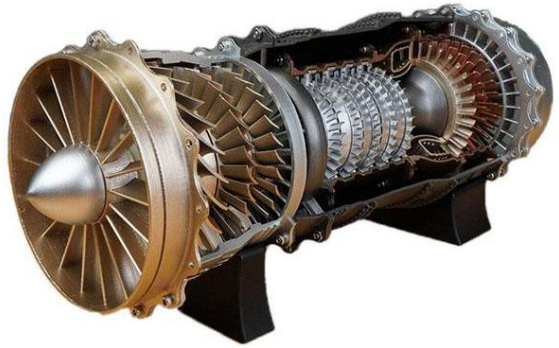


16 octobre 2026
Marseille

Enjeux autour des machines tournantes

Motivation industrielle

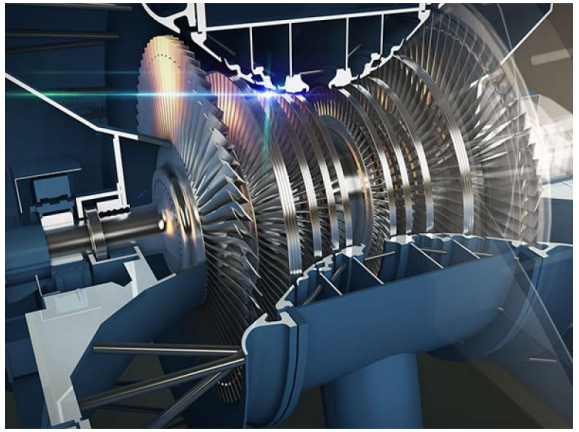
- Technologie répandue en ingénierie
- Surveillance et **maintenance prédictive** de structures industrielles (SHM)
- **Détection** précoce de **fissures** provoquées par vieillissement et contraintes



Turboréacteur d'avion

Recherche scientifique

- **Analyse vibratoire** des systèmes tournants non linéaires pour déterminer les **vitesses critiques** et **amplitudes vibratoires** (**QoI**)
- Phénomène de **résonance** et sensibilité aux fissures
- Analyse robuste par **propagation d'incertitudes** matériau et fabrication



Turbine à vapeur de centrale nucléaire

Sommaire

Modèle éléments finis du rotor fissuré

Méthodes d’apprentissage d’une surface de réponse

Méthodes d’apprentissage simultané de plusieurs surfaces

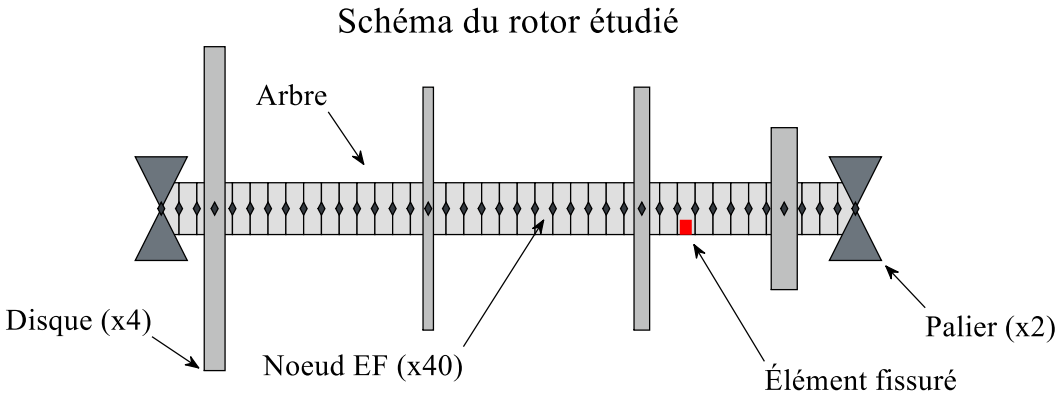
Sommaire

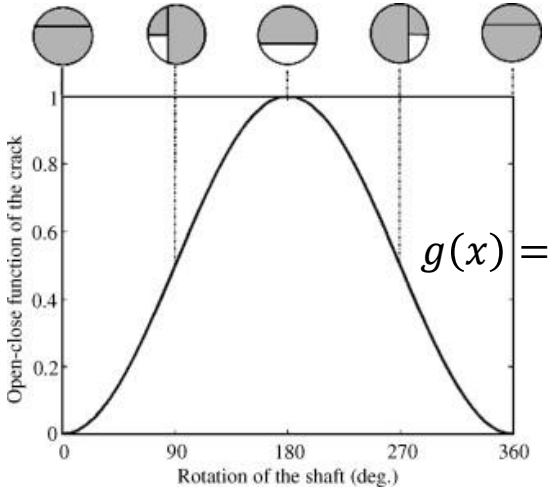
Modèle éléments finis du rotor fissuré

Méthodes d’apprentissage d’une surface de réponse

Méthodes d’apprentissage simultané de plusieurs surfaces

Dynamique non linéaire de la fissure





$$g(x) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$

(Sinou, 2008)

Modèle de **fissure externe transverse :** (Mayes & Davies, 1984)

Respiration synchrone & **équivalence** avec la profondeur réelle en posant $\mu = {}^{h}/_{R} \in [0,1]$

Équation algébrique de la dynamique en $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{M\ddot{x} + (C + \omega G)\dot{x} + \left(K - g(\omega t) \cdot K_f(n,\mu)\right)x = F}$$

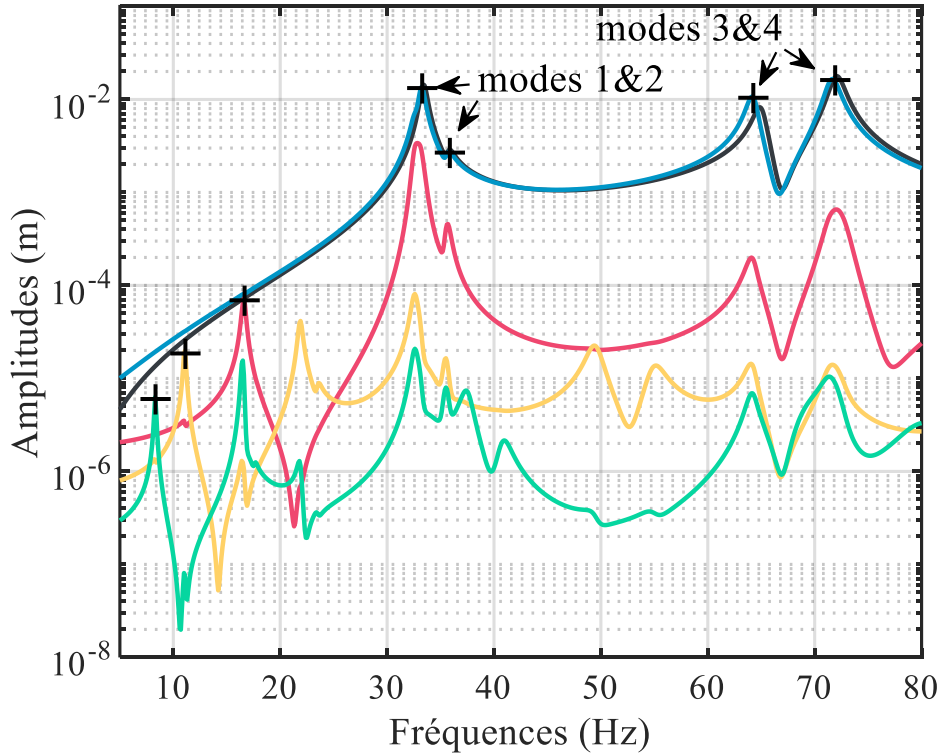
Résolution par la **méthode d'équilibrage harmonique** (HBM) :

m : nombre d'harmoniques (ici $\boldsymbol{m = 4}$)
$\boldsymbol{A_k, B_k}$: vecteurs des composantes de $\boldsymbol{x}$ à l'ordre k

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A_0} + \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{A_k} \cdot cos(k\omega t) + \mathbf{B_k} \cdot \sin(k\omega t)$$

Cas du rotor déterministe avec fissure

Exemple avec la fissure $(n, \mu) = (23, 0.95)$



Rotor

avec fissure	**sans** fissure
Harm1	Harm1
Harm2	
Harm3	
Harm4	

+ : 2 QoI par mode (fréquence & amplitude)

On s'intéresse à **18 QoI** sur **l'ensemble du domaine** de définition Ω de la fissure

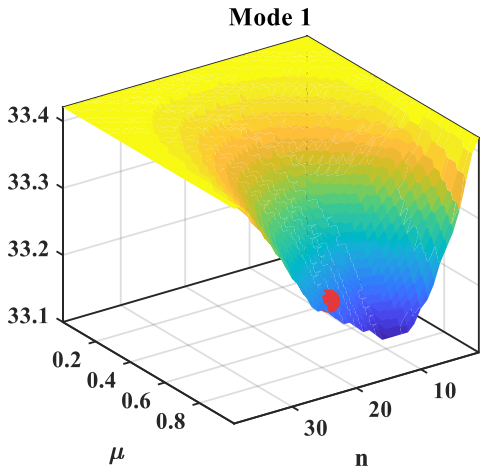
● $(n, \mu) = (23, 0.95)$

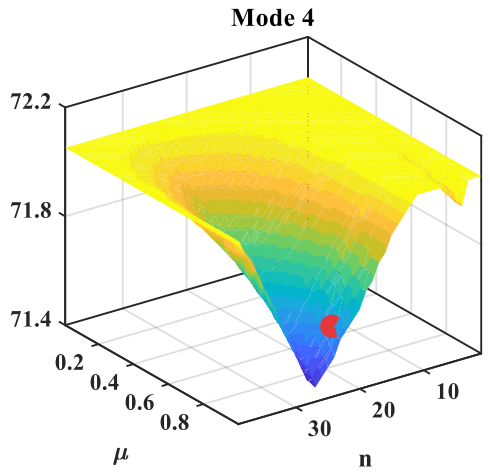
Cas du rotor déterministe avec fissure

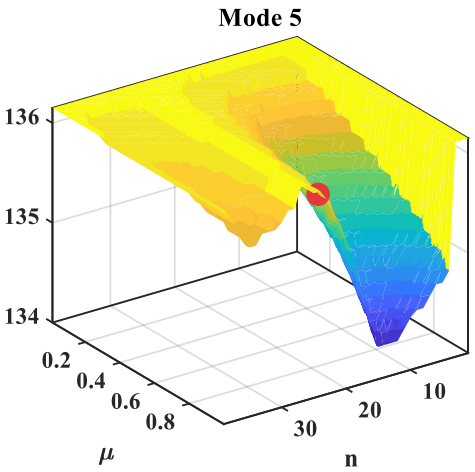
Surfaces de réponse de la fissure

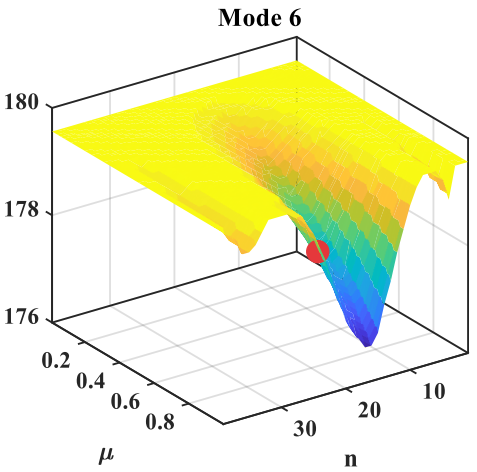
8 QoI

Fréquences (Hz)

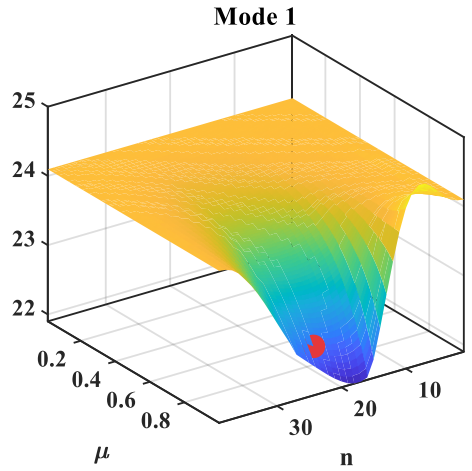


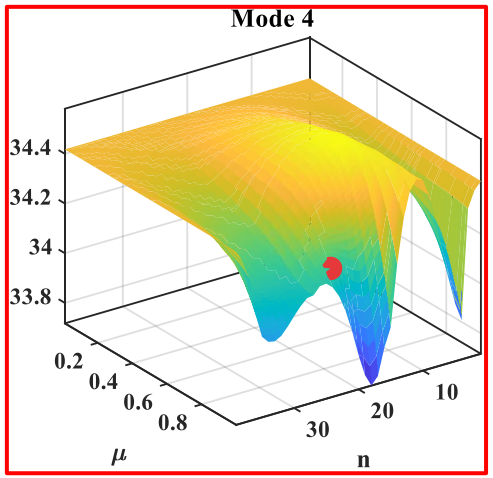


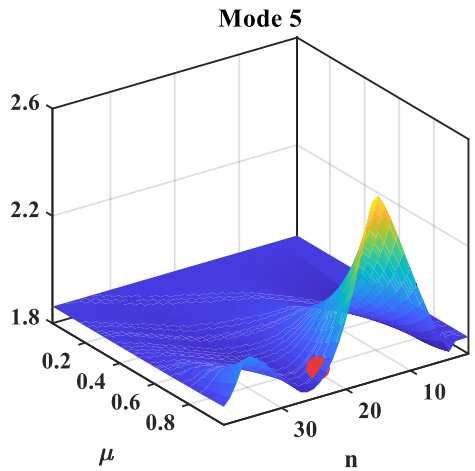


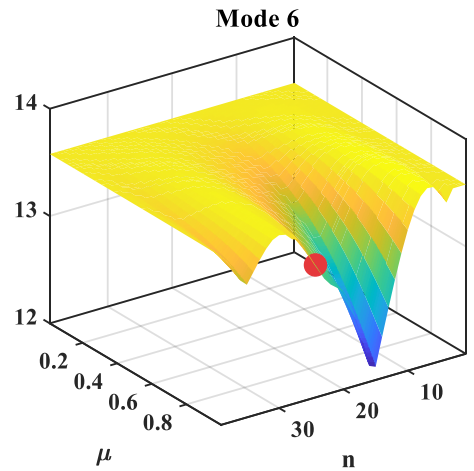


Amplitudes (mm)









Sommaire

Modèle éléments finis du rotor fissuré

Méthodes d’apprentissage d’une surface de réponse

Méthodes d’apprentissage simultané de plusieurs surfaces

Propagation d'incertitudes

Nécessité de réaliser de **nombreux calculs EF** pour quantifier la dispersion des QoI sur le domaine Ω

Coût élevé par calcul ➡ Propager les incertitudes **coûte très cher** ⏳

Solution : utiliser un **métamodèle**

- Modèle de substitution (*surrogate*) au code EF par **processus gaussiens**
- Recours à seulement **quelques calculs EF** pour l'apprentissage du modèle
  - ➢ Résultats calculés pour un ensemble $\mathbf{X} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n$ appelé DoE (plan d'expérience $\mathcal{D}$)
- Prédiction **instantanée** en n'importe quel point de Ω

Un « bon » DoE permet donc d'assurer une bonne prédiction pour un coût d'apprentissage limité

Comment construire le DoE idéal ?

Construction de DoE

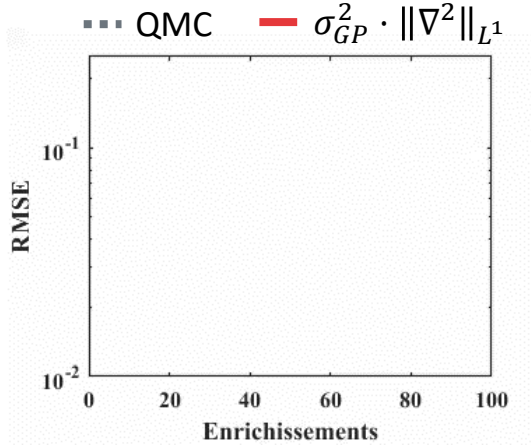
Méthode naïve *offline* : DoE préparé en amont, **indépendamment** du modèle – LHS / (Quasi) Monte Carlo

Apprentissage actif *online* :

- À partir d'un DoE initial, enrichissement **séquentiel** et **adapté** au métamodèle
- Chaque itération est basée sur l'optimisation d'une **fonction d'acquisition** f_{acq} sur Ω
  - Pour une base d'apprentissage $(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{y}_n)$ fixée, libre choix de l'acquisition selon le **critère** à privilégier
  - **Optimisation** réalisée par **algorithme génétique** ou **descente de gradient** : $x_{n+1} = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmax}}\, f_{acq}(x)$

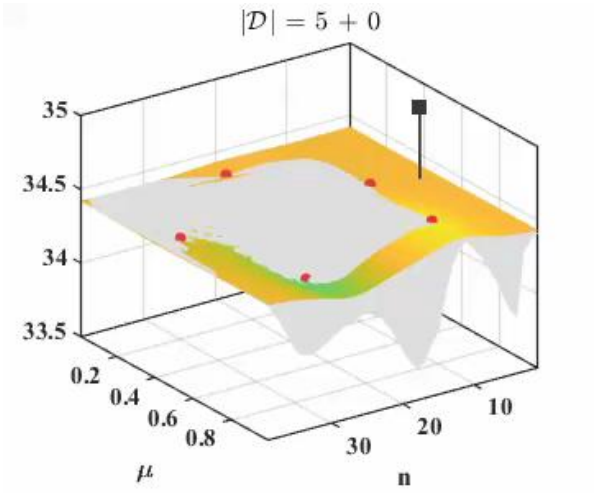
Exploration 🧭		⚡ Exploitation
$\boldsymbol{\sigma^2}(\cdot) = \sigma_0^2 - \boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{X})^T \times \boldsymbol{R^{-1}} \times \boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{X})$	$\boldsymbol{d}_{maxmin}(\cdot) = \frac{\min d(\cdot,\boldsymbol{X})}{\max \min d(\boldsymbol{X})}$	$\nabla \boldsymbol{m}(\cdot) = \sum_k \alpha_k \cdot \nabla \mathrm{corr}(\cdot, x_k)$
$\Delta\boldsymbol{\sigma}^2(\cdot) = \int_\Omega \frac{[\boldsymbol{R}(\cdot,x) - \boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{X})^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},x)]^2}{\boldsymbol{R}(\cdot) - \boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{X})^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{X})} dx$	$\boldsymbol{\sigma}^2_{LOO}(\cdot) = \mathrm{Var}[\boldsymbol{m}(\cdot \mid \boldsymbol{X}_{-k})]$	$\nabla^2 \boldsymbol{m}(\cdot) = \sum_k \alpha_k \cdot \nabla^2 \mathrm{corr}(\cdot, x_k)$
($\boldsymbol{R}$: matrice de covariance du GP)	(LOO : *Leave One Out*) $\boldsymbol{m}$: prédiction du GP	$(\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{R^{-1}} \times \boldsymbol{y} = (\alpha_k)_k)$

Illustration des 2 approches

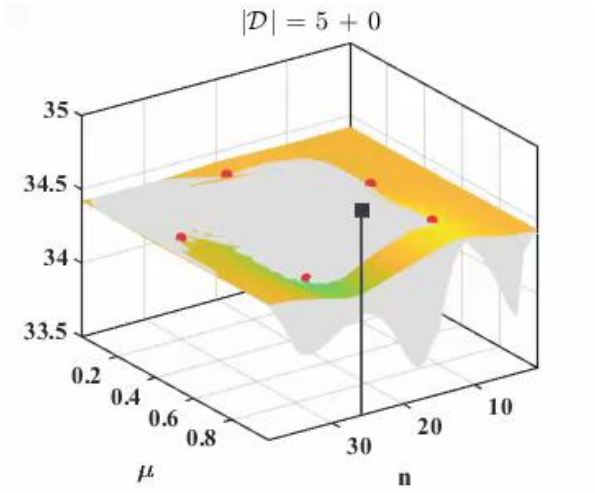


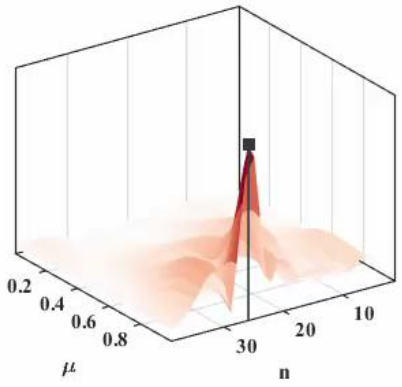
Précision × 2,7

QMC (*offline* de référence)

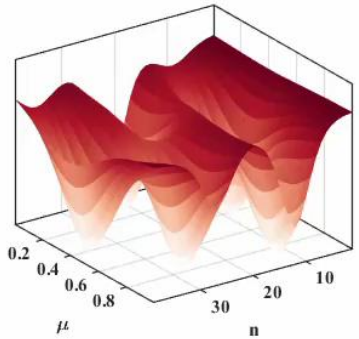


$\boldsymbol{f_{acq}} = \sigma^2_{GP} \cdot \|\nabla^2\|_{L^1}$ (*online*)



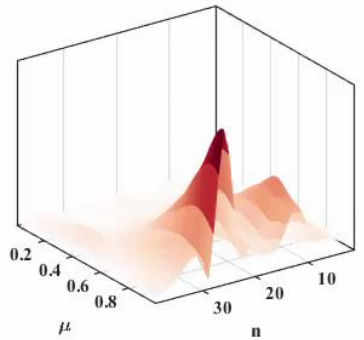


=



σ^2_{GP} (🧭)

×



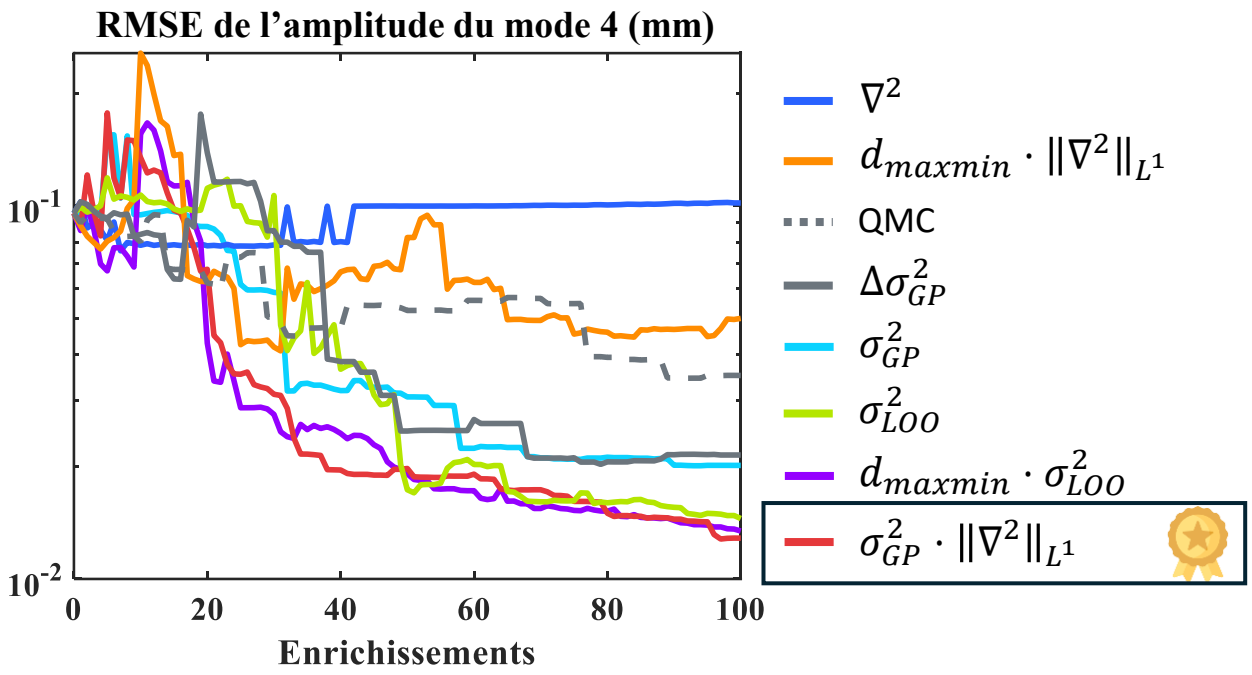
$\|\nabla^2\|_{L^1}$ (🎯)

Amplitude (mm) du mode 4

$\mathcal{D}_{initial}$ (5 points LHS)

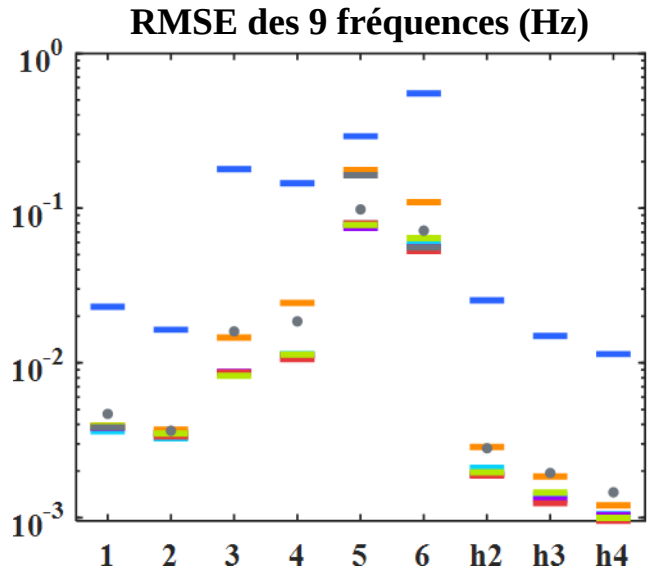
100 itérations

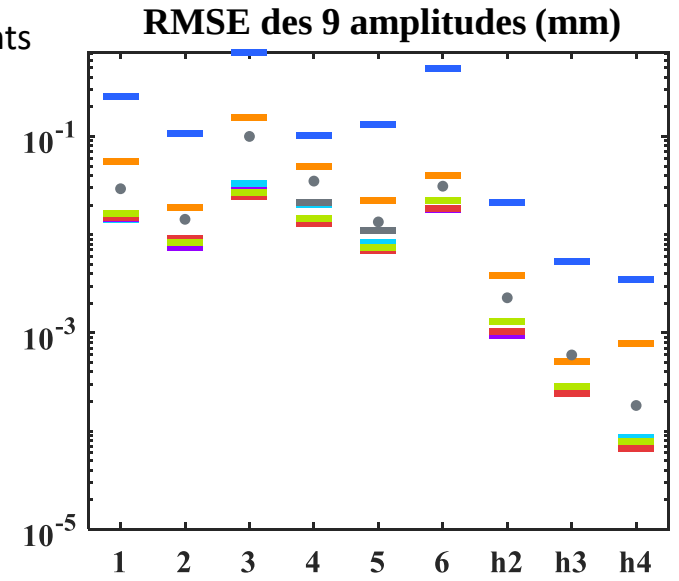
Comparaison des acquisitions



Pour les 18 QoI

après 100 enrichissements





$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N_{valid}} \sum_{k=1}^{N_{valid}} \left(y_k^{pred} - y_k^{vrai}\right)^2}$$

Sommaire

Modèle éléments finis du rotor fissuré

Méthodes d’apprentissage d’une surface de réponse

Méthodes d’apprentissage simultané de plusieurs surfaces

Apprentissage couplé des QoI

Rappel : Nombreuses QoI ($D = 18$) obtenues simultanément pour chaque configuration de rotor et fissure.

Pour un choix de f_{acq}, chaque QoI est **indépendamment** associée à 1 DoE et 1 métamodèle

Pourrait-on imaginer ne construire qu'un **unique DoE**, ou même un **unique métamodèle** ?

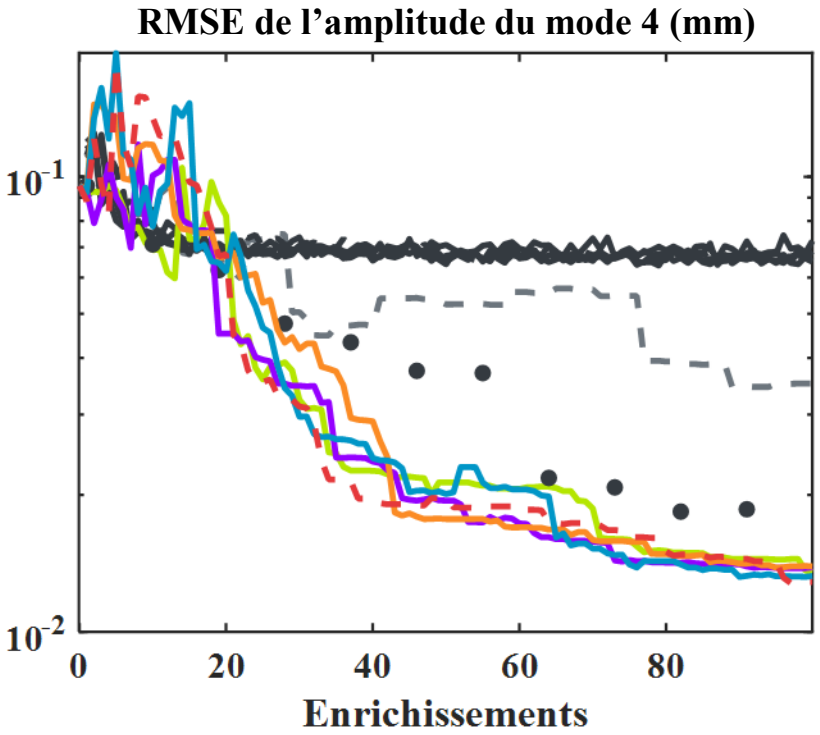
Méthodes d'apprentissage des D QoI :

- 1 DoE et D métamodèles
  - Modèles individuels : circulaire ou batch
  - Couplage des sorties par agrégation des f_{acq}
- 1 DoE et 1 métamodèle
  - Processus gaussiens exploitant les **corrélations** entre de multiples sorties

Comparaison des modèles individuels, couplés et corrélés

$$f_{acq} = \sigma_{GP}^2 \cdot \|\nabla^2\|_{L^1}$$

Coûts relatifs pour l'entraînement des D QoI



Pour rappel et comparaison

$\times 1$ $\sigma_{GP}^2 \cdot \|\nabla^2\|_{L^1}$ $\times 0,5$ QMC

Modèles **individuels**

$\times \frac{1}{D+\varepsilon}$ Batch

$\times \frac{1}{D}$ Cyclique

Couplage des f_{acq}

$\times 1,3$ Σ $\prod$ max

MOGP **corrélés** (couplages / f_{acq} globale / QMC)

$\times 12$ $\times 5$ $\times 0,5$

Conclusions

Comparaison de méthodes d'**apprentissage actif** par rapport à une méthode *offline*

Stratégies d'apprentissage groupé dans le cas de **sorties multiples**

Application à un problème 2D de **mécanique non linéaire** d'un rotor fissuré

Extension en dimension supérieure pour la **propagation d'incertitudes** sur un rotor fissuré

Méthodes d’apprentissage adaptatives pour la construction de métamodèles des réponses vibratoires non linéaires d’un rotor fissuré en milieu incertain

Merci de votre attention

Erwan DEHILLERIN [(1) (2)], Enora DENIMAL GOY [(1)], Jean-Jacques SINOU [(2)]

[(1)] *Inria, Centre de Mathématiques APpliquées (CMAP), Ecole Polytechnique, IPP, Palaiseau*

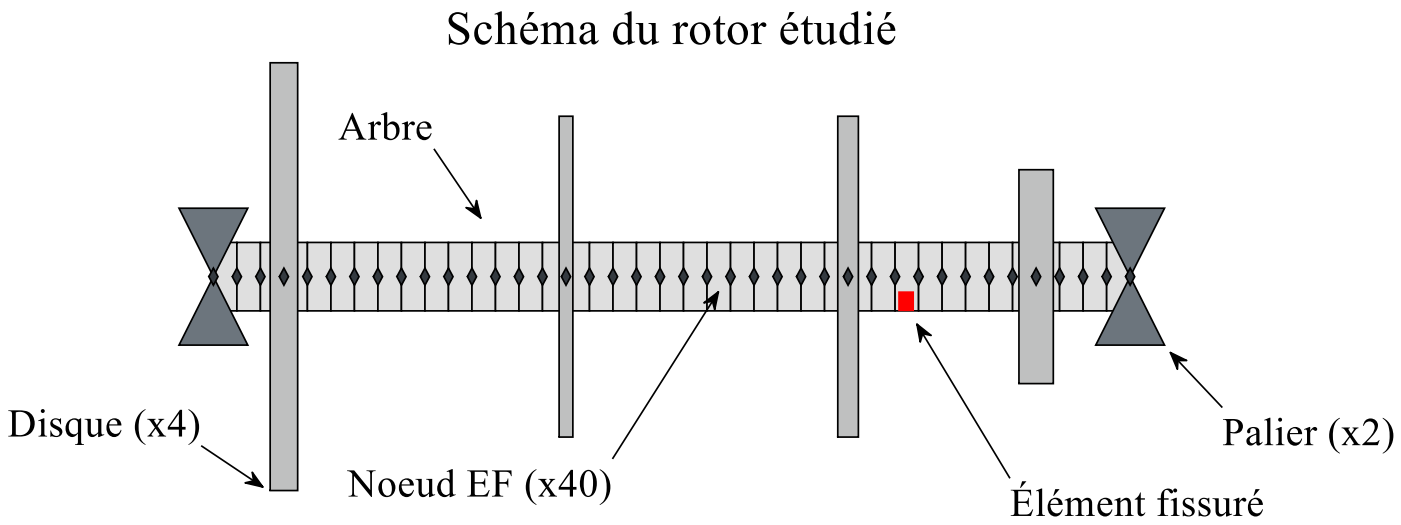
[(2)] *Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), Ecole Centrale Lyon, Ecully*

EX-MODELI
EXPLOITATION & MODÉLISATION des DYNAMIQUES NON LINÉAIRES
GdR CNRS 2134

16 octobre 2026
Marseille

Annexes

Cadre de l'étude



- Rotor en acier de 1m de long – paliers **asymétriques**
- Modèle éléments finis de 40 nœuds – problème de flexion à 160 ddl

Incertitudes de $\pm 10\%$ sur **9 paramètres** mécaniques et géométriques		
Arbre ρ_a E_a	**Disque 3** ρ_{d3} e_{d3} D_{d3}	**Paliers** k_{1v} k_{1h} k_{2v} k_{2h}

Métamodélisation par processus gaussiens (GP)

Motivations :

- Méthode à **noyau** (non paramétrique) adaptée aux dimensions du problème étudié
- Modèle **analytique** dont la prédiction d'accompagne d'une **mesure d'incertitude**

Construction :

- **Fonction de covariance** $corr$ entre les points $\boldsymbol{X}$ du DOE : lisse avec décroissance exponentielle
- Détermination de ses hyperparamètres par **MLE**, telles que leurs valeurs expliquent au mieux les données $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{y})$
- Loi a posteriori de la fonction de régression obtenue par **inférence bayésienne** sous hypothèse de bruit gaussien

Prédiction en $x_* \in \Omega$ (avec $\boldsymbol{R}$ la matrice de covariance) :

$$\boldsymbol{m}(x_*) = \boldsymbol{R}_{x_*}^T \times \underbrace{\boldsymbol{R^{-1}} \times \boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{\mathrm{k}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^2(x_*) = \sigma_0^2 - \boldsymbol{R}_{x_*}^T \times \boldsymbol{R^{-1}} \times \boldsymbol{R}_{x_*}}$$

Multi Output Gaussian Processes (MOGP)

Modèle linéaire de corégionalisation (LMC) d'ordre Q et rang r pour D sorties corrélées :

$$\boldsymbol{R} = \sum_{q=1}^{Q} \boldsymbol{B}^{(q)} \otimes \boldsymbol{R}^{(q)} \in \mathcal{M}_{ND}(\mathbb{R}) \qquad \text{avec } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{W}^{T} \qquad \text{tel que } \boldsymbol{W} \in \mathcal{M}_{D,r}(\mathbb{R}) \text{ de rang } r$$