



# APPROCHE HYBRIDE INTÉGRANT DONNÉES ET PHYSIQUE POUR LA PRÉDICTION DES BIFURCATIONS DANS LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Auteurs :

Jesús García Pérez,

Leonardo Sanches, Amin Ghadami, Bogdan Epureanu et Guilhem Michon

GDR EX-MODELI

Le 9 Novembre 2023

Besançon, France

# SOMMAIRE

- Contexte et motivation
- Méthodologie
- Résultats
- Conclusions



## Problématique de recherche

- ◆ Une **bifurcation** intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans la réponse du système

Aéroélasticité



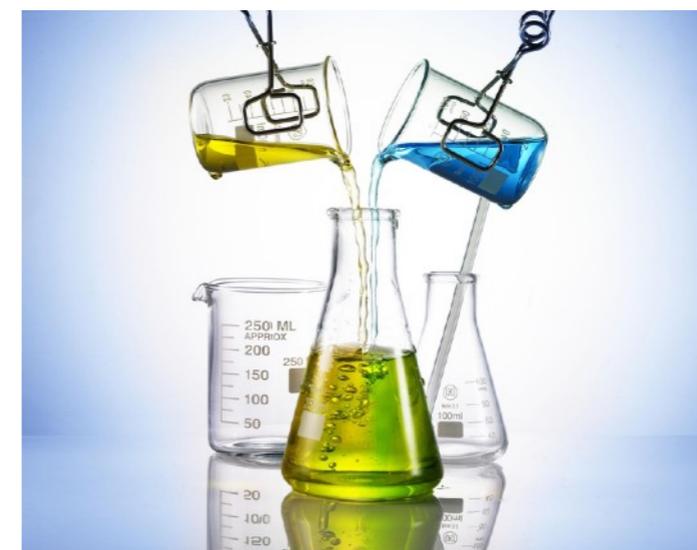
Écologie et Dynamique des Populations



Finances

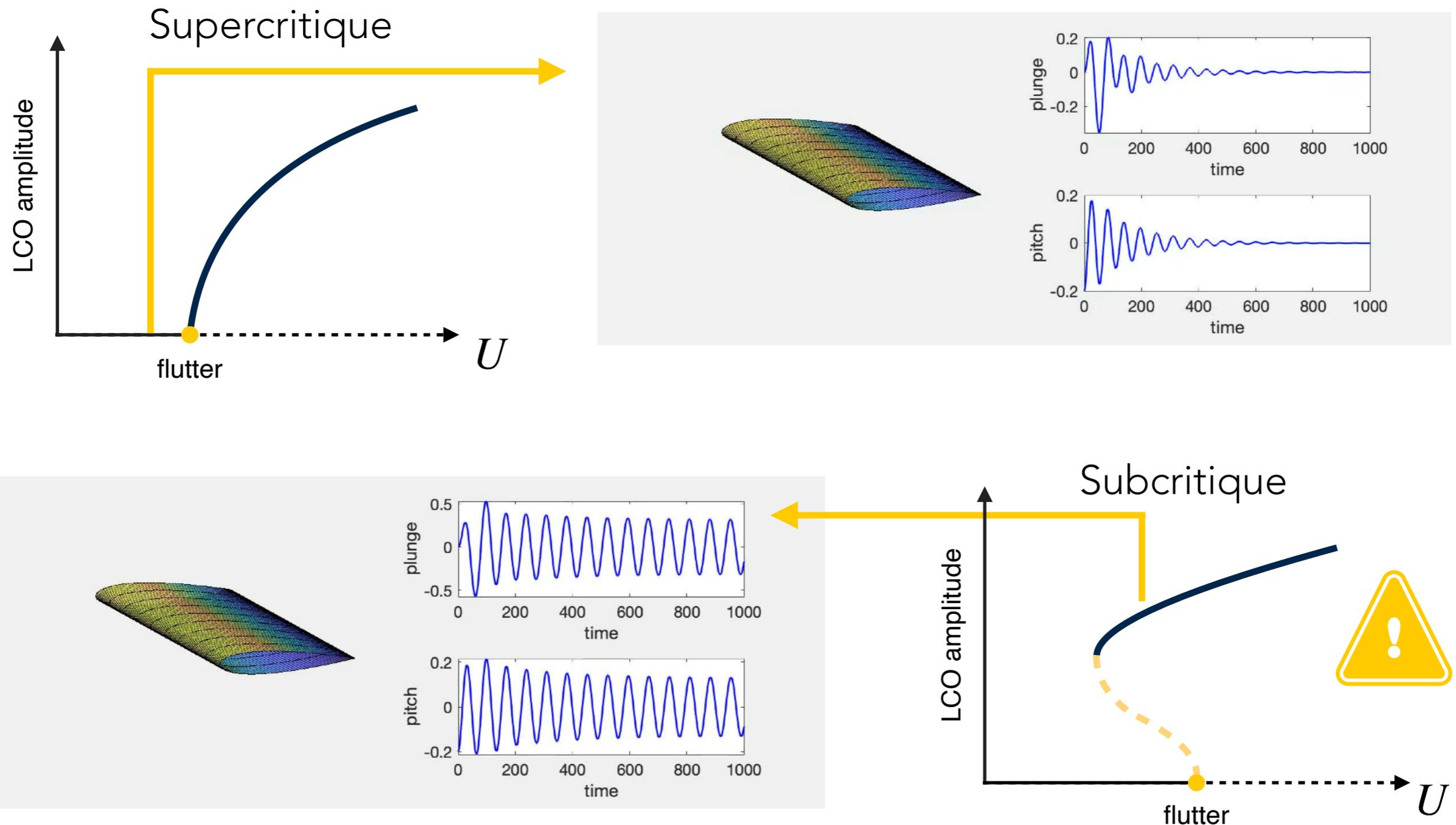


Réactions chimiques



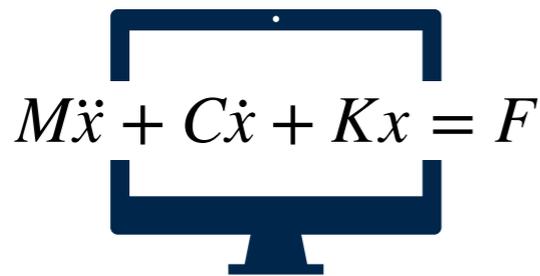
## Problématique de recherche

- ◆ Bifurcation de Hopf dans les systèmes aéroélastiques :



## Problématique de recherche

- ◆ L'identification des bifurcations est :
  - ◆ Essentielle pour définir l'enveloppe de fonctionnement de sûreté ou concevoir des solutions de contrôle
  - ◆ un défi en raison de la complexité des systèmes non linéaires
- ◆ Méthodes disponibles :


$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$



- ◆ **Méthodes basées sur des modèles :**

- ◆ Nécessitent des équations du modèle
- ◆ Coût computationnel élevé pour l'analyse non linéaire
- ◆ Calibration approfondie : erreurs pour les systèmes de grande dimension et à haute flexibilité

- ◆ **Méthodes axées sur les données :**

- ◆ Nécessitent une quantité considérable de données
- ◆ Se concentrent sur un seul paramètre

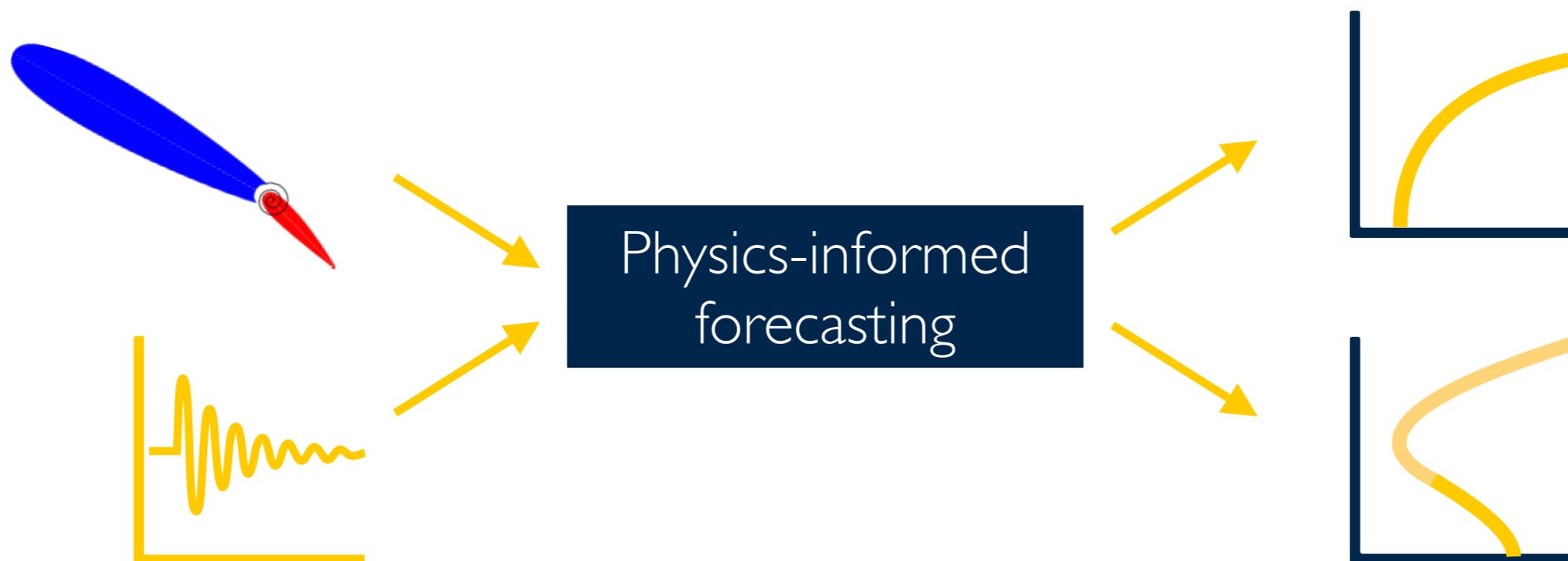
## Objectifs

### ◆ Motivations :

- ◆ Combiner des modèles numériques et données sur le système
- ◆ Caractériser le comportement non-linéaire proche de la bifurcation
- ◆ Déterminer le type de bifurcation: super- ou sub-critique

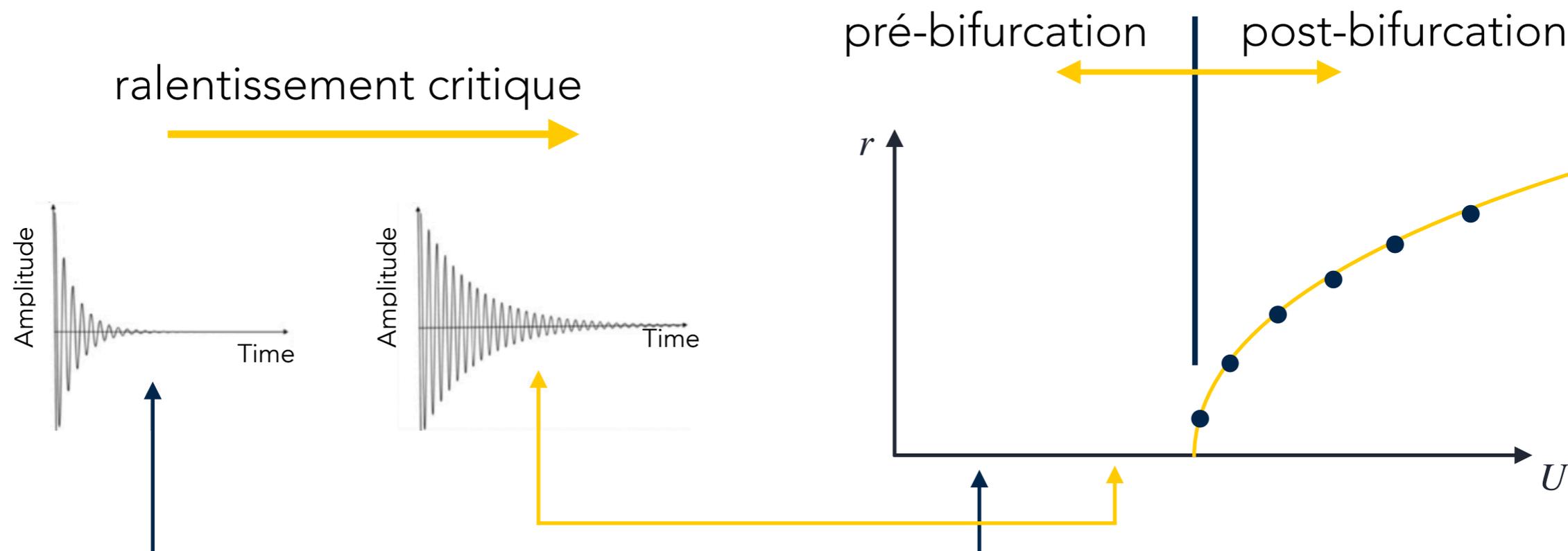


- ◆ **Objectif principal** : Développer une méthode hybride intégrant données et physique pour la prédiction des bifurcations dans les systèmes dynamiques



## Forecasting

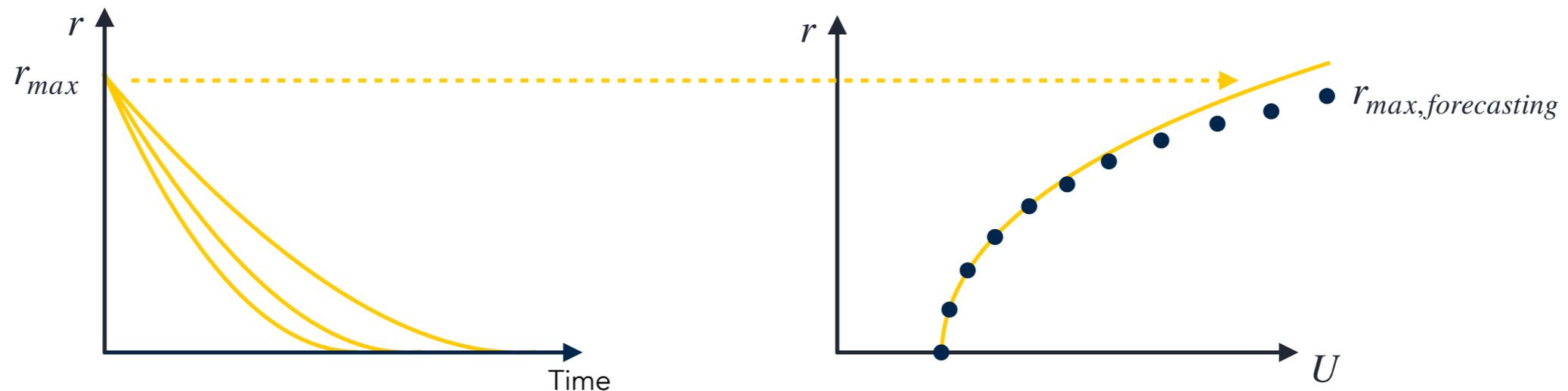
- ◆ Prédire la bifurcation avant qu'elle ne se produise en utilisant le régime pré-bifurcation → le phénomène de ralentissement critique → le taux de récupération diminue à mesure que le système approche de la bifurcation



- ◆ Nouvelle approche pour la prévision des simulations "forecasting":
  - ◆ Sans modèle
  - ◆ Non limitée à de petites perturbations
  - ◆ Utilisation exclusive du régime pré-bifurcation

## Forecasting

- ◆ Limitations de la méthode de forecasting:
  - ◆ Diminution de la précision à grande amplitude
  - ◆ Sensibilité au bruit
  - ◆ Difficulté à suivre les changements sur le diagramme de bifurcation



- ◆ Considérez une bifurcation de co-dimension un régie par :

$$\dot{r} = f(\mu, r)$$

- ◆ Près de l'instabilité  $\mu = \mu_c$  le système peut être approximé par :

$$\lambda = \frac{\dot{r}}{r} = p(r) + \alpha_1(r)(\mu - \mu_c) + \alpha_2(r)(\mu - \mu_c)^2 + \text{High Order Terms}$$

- ◆ Forecasting résout numériquement l'équation  $f(\mu, r) = 0$  pour les amplitudes choisies des réponses

## MMS

- ◆ La prédiction du forecasting peut être améliorée en introduisant des informations sur les non-linéarités du système
- ◆ Appliquer la méthode des multiples échelles (MMS) pour obtenir une forme normale pour des non-linéarités générales
- ◆ La méthode des multiples échelles commence par une expansion polynomiale générale des non-linéarités

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mu) \approx \mathbf{J}(\mu)\mathbf{x} + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathbf{F}_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \dots + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{J}(\mu) = \mathbf{J}_0(\mu_c) + (\mu_c - \mu)\mathbf{J}_1$$

- ◆ Son application numérique fournit la forme normale pour le mode instable qui introduit la bifurcation :

$$\frac{dr_u}{dt} + g_1(r_u) + g_2(r_u)(\mu - \mu_c) + g_3(r_u)(\mu - \mu_c)^2 + \dots + g_N(r_u)(\mu - \mu_c)^N = 0$$

$$g_i(r_u) = r_u \chi_{0,i-1} + h_i(r_u) \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$g_N(r_u) = r_u \chi_{0,N}$$

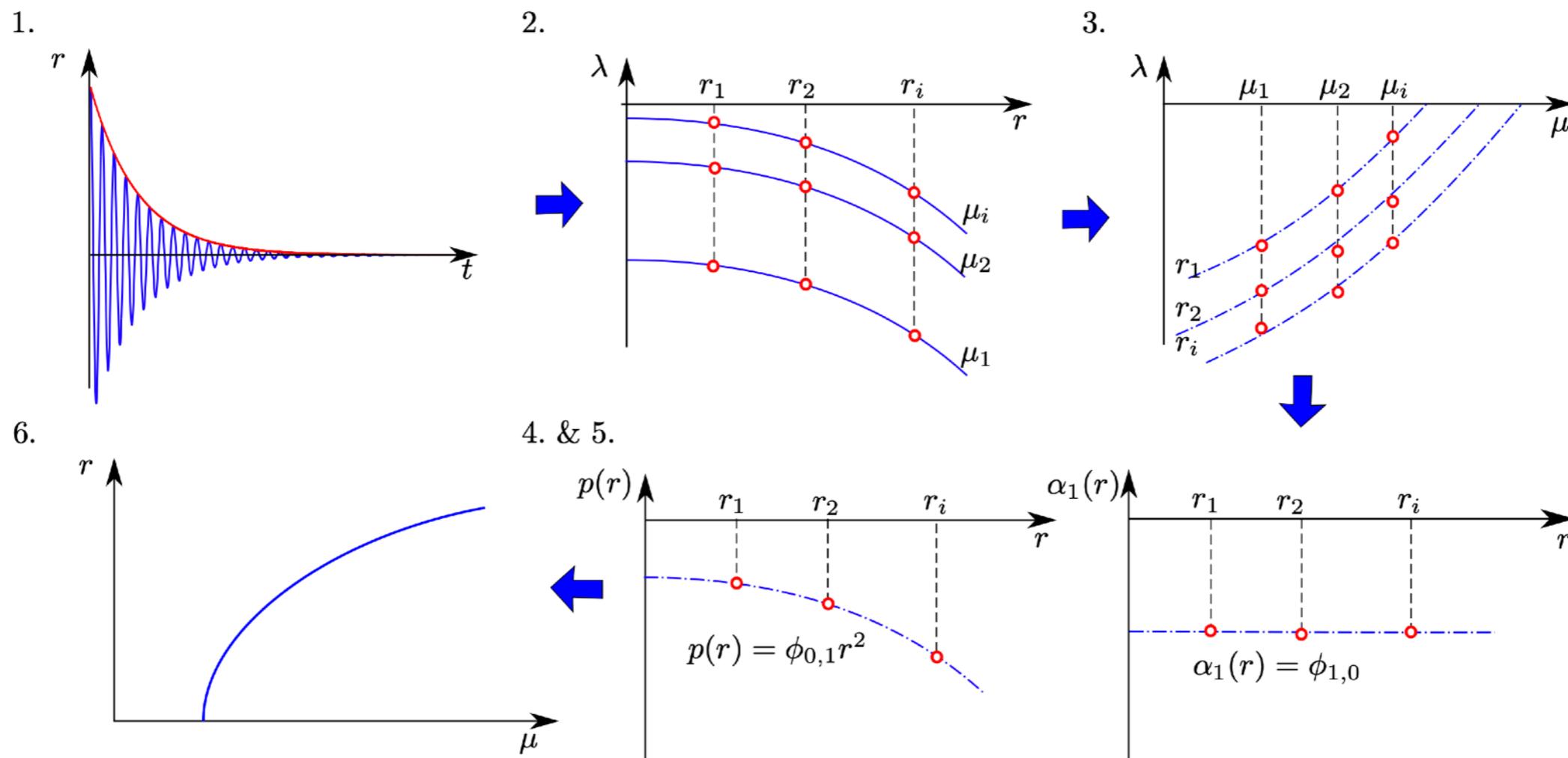
## Forecasting-MMS

- La forme normale est ensuite comparée à l'équation de prévision des taux de récupération :

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{g_1(r)}{r} - \frac{g_2(r)}{r}(\mu - \mu_c) - \frac{g_3(r)}{r}(\mu - \mu_c)^2 - \dots - \frac{g_N(r)}{r}(\mu - \mu_c)^N$$

$$p(r) = \frac{g_1(r)}{r}, \quad \alpha_i(r) = \chi_{0,i} + \frac{h_i(r)}{r}$$

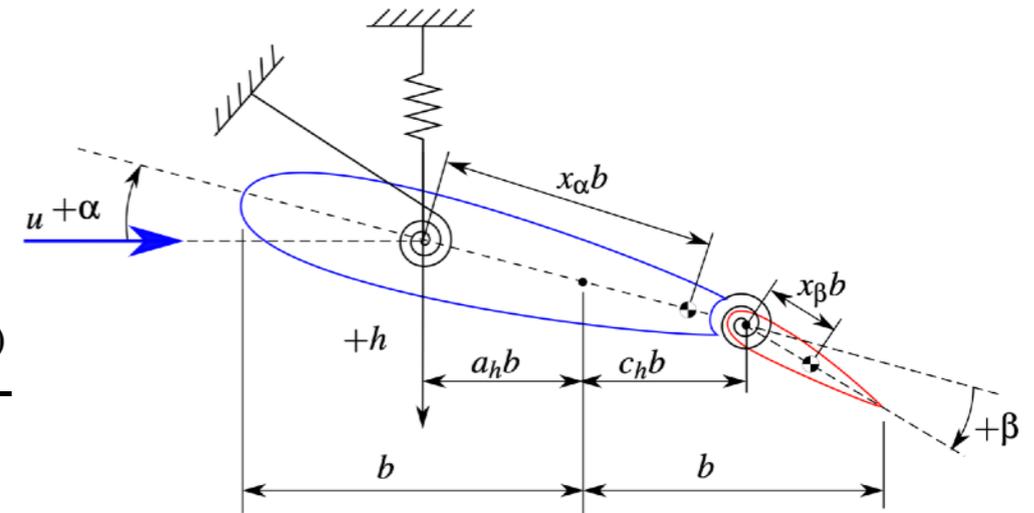
- Mise en oeuvre :



## Application

- ◆ Équations du mouvement d'un système à 3 degrés de liberté :

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + x_\alpha \ddot{\alpha} + x_\beta \ddot{\beta} + \frac{2\zeta_\xi \bar{\omega}_1}{U} \dot{\xi} + \left(\frac{\bar{\omega}_1}{U}\right)^2 G_\xi(\xi) = -\frac{C_L(\tau)}{\mu} \\ \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} \ddot{\xi} + \ddot{\alpha} + \frac{2\zeta_\alpha}{U} \dot{\alpha} + \frac{r_\beta^2 + (c_h - a_h)x_\beta}{r_\alpha^2} \ddot{\beta} + \frac{1}{U^2} G_\alpha(\alpha) = \frac{C_{M_\alpha}(\tau)}{\mu r_\alpha^2} \\ \frac{x_\beta}{r_\beta^2} \ddot{\xi} + \ddot{\beta} + \frac{\bar{\omega}_2}{U} \chi_{\beta_N} \dot{\beta} + \frac{r_\beta^2 + (c_h - a_h)x_\beta}{r_\beta^2} \ddot{\alpha} + \left(\frac{\bar{\omega}_2}{U}\right)^2 k_{\beta_N} \beta^3 = \frac{C_{M_\beta}(\tau)}{\mu r_\beta^2} \end{cases}$$



- ◆ La non-linéarité structurelle est donnée par :

- ◆ Supercritique : non-linéarité cubique de tangage :  $G_\alpha(\alpha) = \alpha + 50\alpha^3$
- ◆ Subcritique : non-linéarité ordre 5 de tangage :  $G_\alpha(\alpha) = \alpha - 5\alpha^3 + 20\alpha^5$

- ◆ Application de MMS:

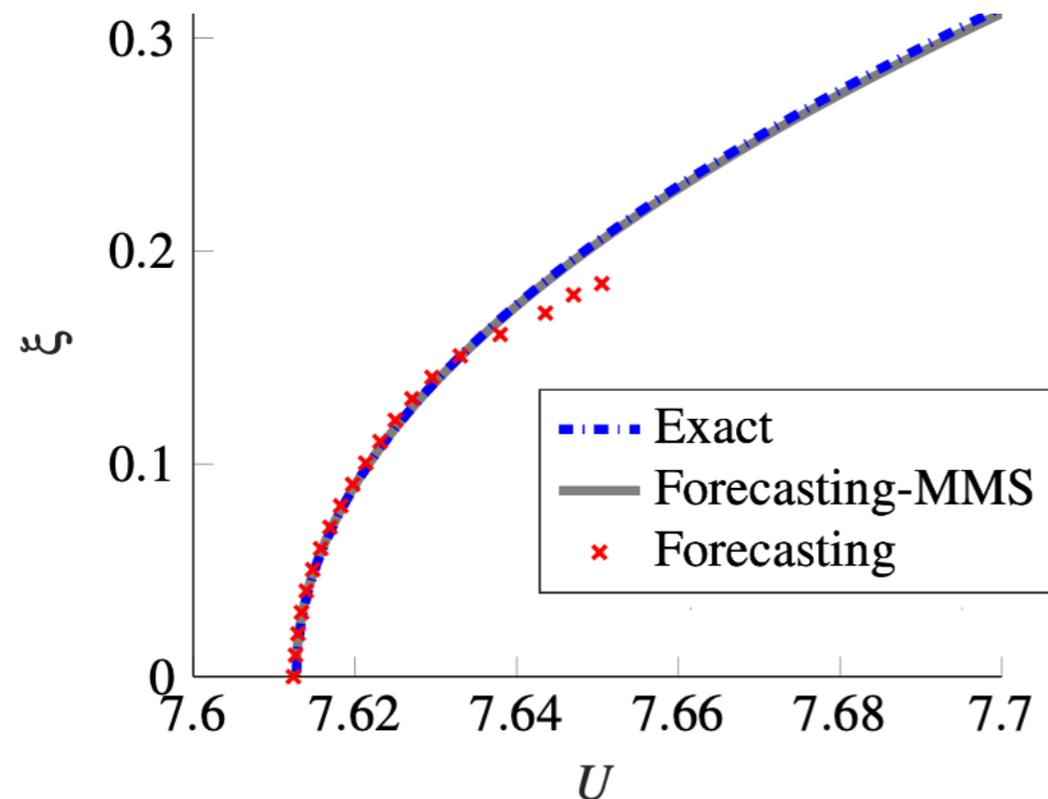
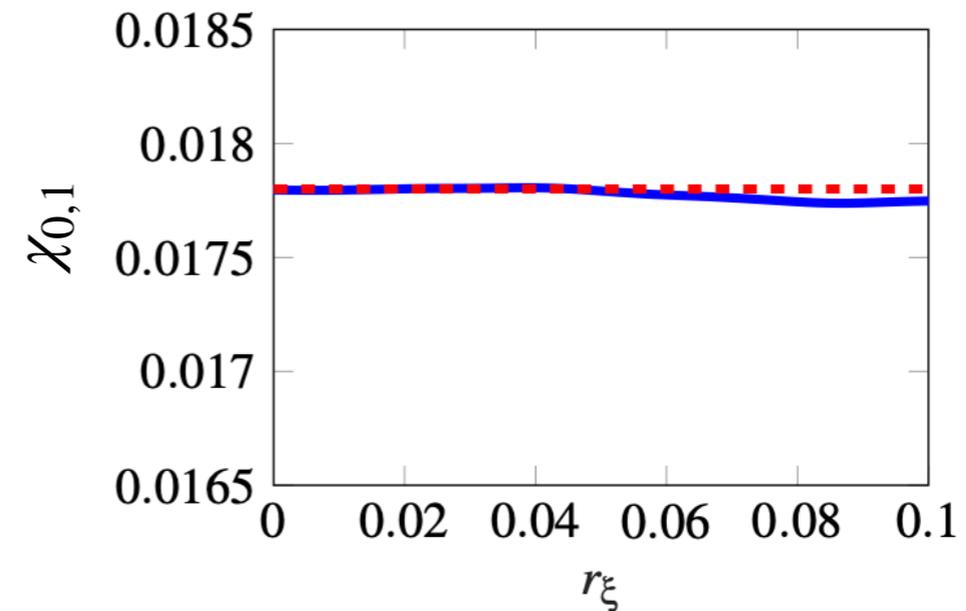
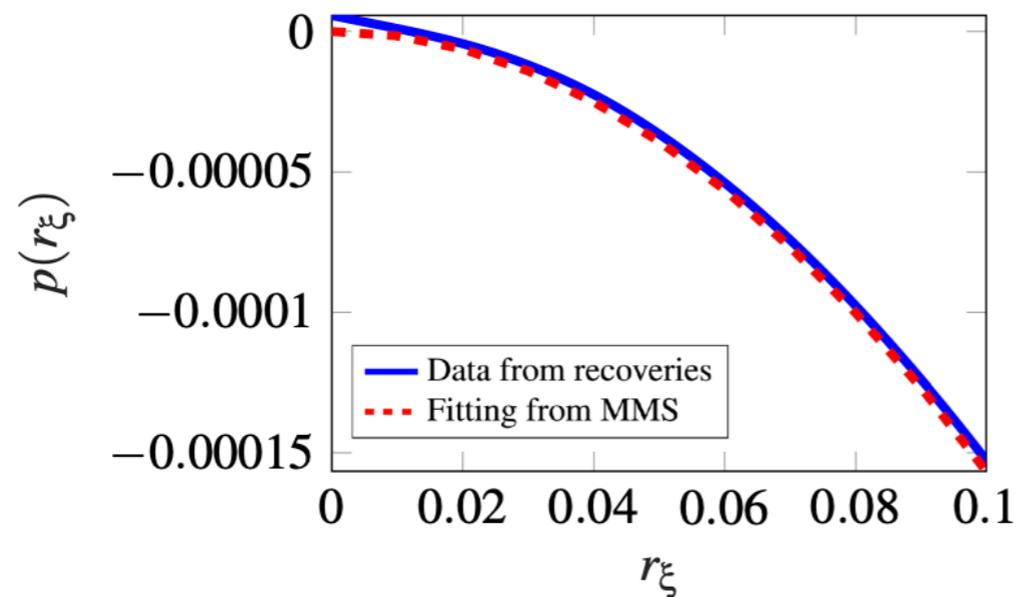
- ◆ Approximation d'ordre un
- ◆ Formes fonctionnelles obtenues avec l'information de la non-linéarité :

$$p(r) = p_1 r^2 + p_2 r^4, \quad \alpha_1(r) = \chi_{0,1}$$

$$0 = p_1 r^2 + p_2 r^4 + \chi_{0,1}(U - U_F)$$

## Performance

- ◆ Application de la méthode de forecasting-MMS à un système aéroélastique de tangage et de plongée présentant une bifurcation supercritique



bifurcation  
supercritique

$$0 = p_1 r^2 + \chi_{0,1} (U - U_F)$$

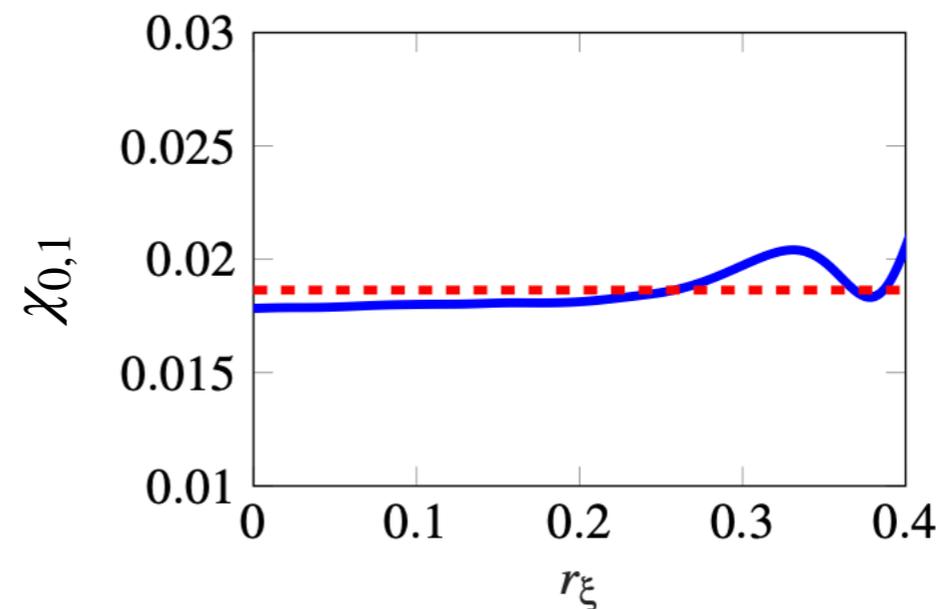
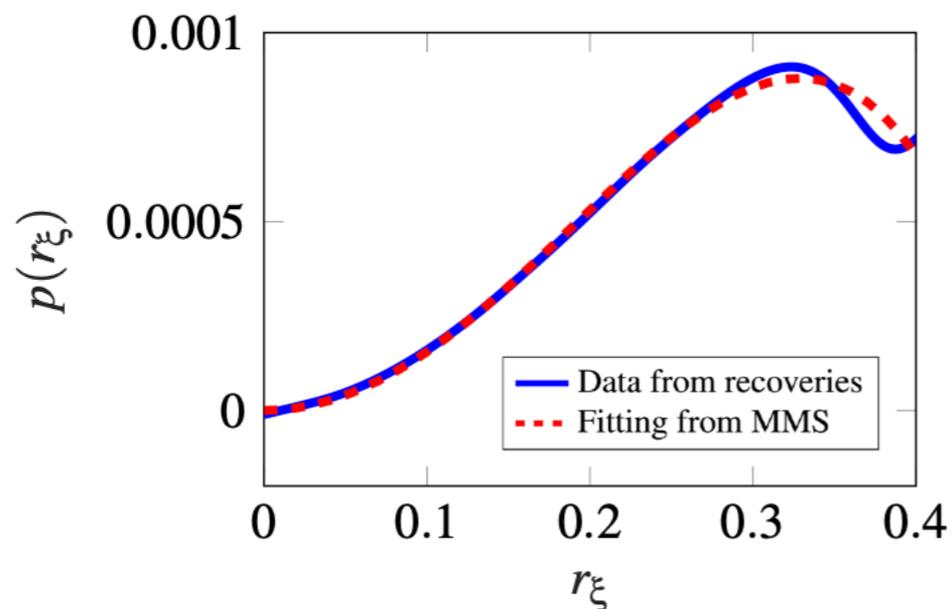
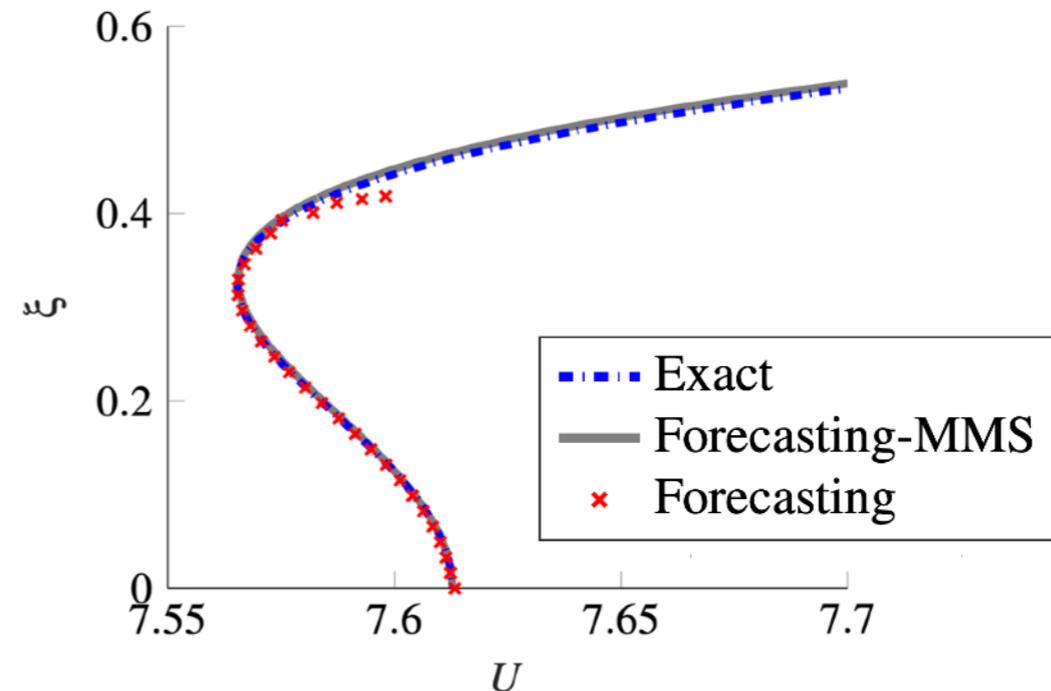
## Performance

- ◆ Application de la méthode de forecasting-MMS à un système aéroélastique de tangage et de plongée présentant une bifurcation subcritique

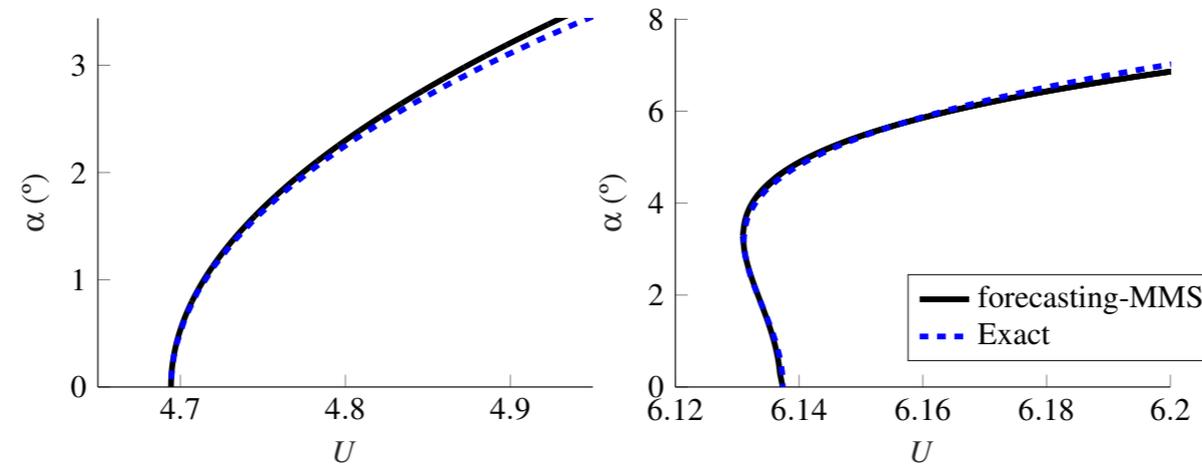
bifurcation  
subcritique



$$0 = p_1 r^2 + p_2 r^4 + \chi_{0,1}(U - U_F)$$



- ◆ La méthode de forecasting-MMS qui utilise des mesures du régime pré-bifurcation et les non-linéarités du système pour prédire les bifurcations



- ◆ Dynamique post-flutter d'un profil d'aile à 3 degrés de liberté prédite et analysée pour deux bifurcations différentes : supercritique et subcritique
- ◆ Les avantages de l'approche de forecasting-MMS proposée par rapport à la prévision classique sont la grande précision à de grandes amplitudes et l'utilisation de données bruitées
- ◆ Limitation : nécessité de connaître les non-linéarités du système

# MERCI



# DES QUESTIONS ?

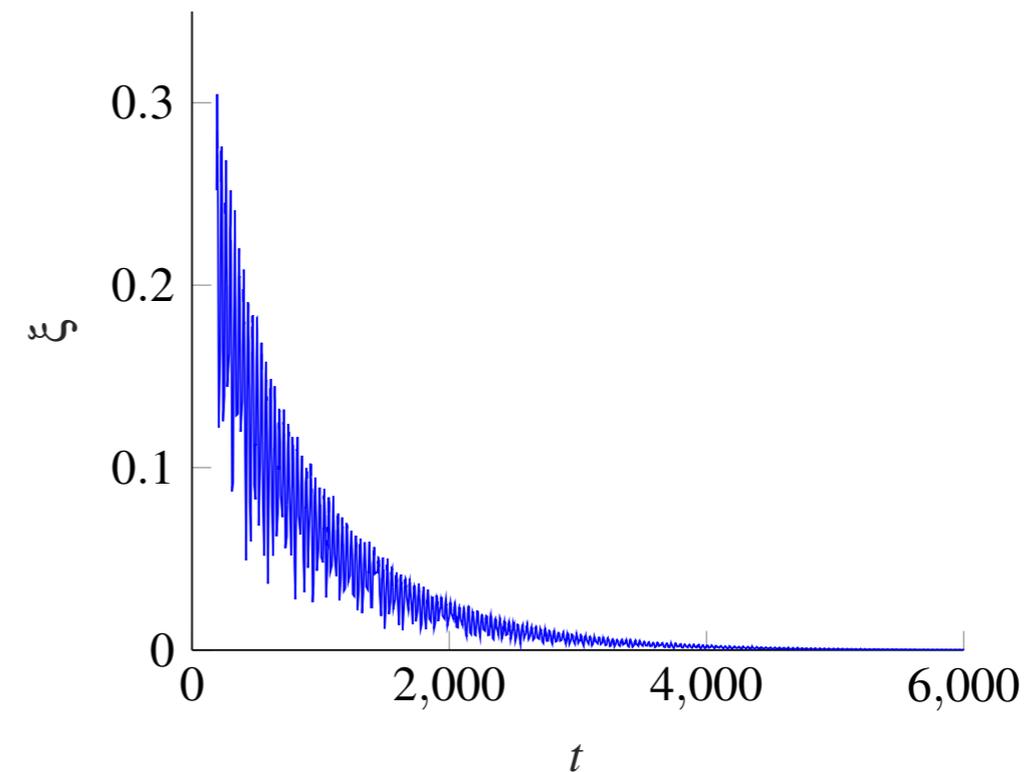
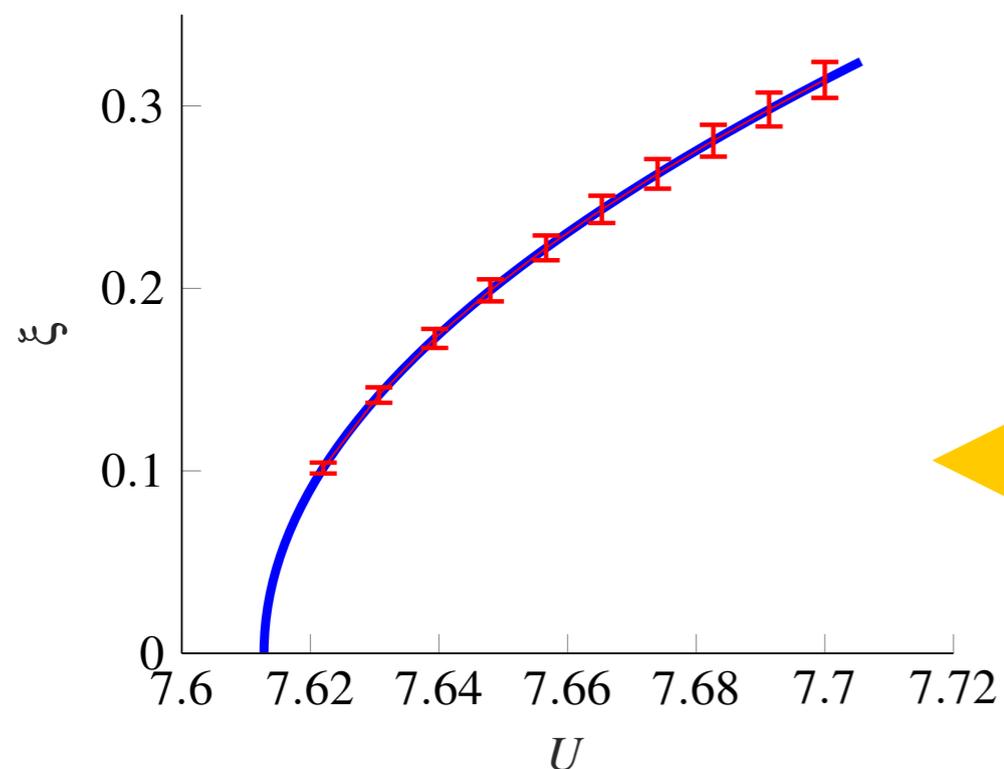
## Références

- [1] Lim, J., and Epureanu, B. I., "Forecasting bifurcation morphing: application to cantilever-based sensing," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 67, No. 3, 2012, pp. 2291–2298.
- [2] García Pérez, J., Ghadami, A., Sanches, L., Michon, G., and Epureanu, B.I., "Data-driven optimization for flutter suppression by using an aeroelastic nonlinear energy sink," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 114, 2022, p. 103715.
- [3] García Pérez, J., Sanches, L., Ghadami, A. et al. A physics-informed data-driven approach for forecasting bifurcations in dynamical systems. *Nonlinear Dyn* 111, 11773–11789 (2023)
- [4] Jesús García Pérez, Amin Ghadami, Leonardo Sanches, Guilhem Michon and Bogdan Epureanu. "Bifurcation analysis of an aeroelastic system under flight varying conditions: A hybrid approach," AIAA 2023-1194. AIAA SCITECH 2023 Forum. January 2023

## Performance

- ◆ Application de la méthode de forecasting-MMS
  - ◆ Performance de la méthode avec bruit de 5% aux réponses du système aux perturbations aléatoires dans le régime pré-bifurcation

Fonction décroissante bruitée  
du déplacement de la plongée



Écart type de 50 prédictions