



Institut d'Acoustique
Graduate School

Le Mans Université

Bassins d'attraction dynamiques dans un modèle simple d'instrument de musique auto-oscillant

Soizic Terrien¹, Baptiste Bergeot², Christophe Vergez³

1 - Lab. Acoustique Univ. du Mans, CNRS, Institut d'Acoustique - Graduate School, Le Mans Univ.

2 - LaMé, INSA Centre Val de Loire, Univ. Orléans, Univ. Tours, Blois,

3 - Lab. Mécanique et Acoustique, Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille

Journées annuelles du Groupement de Recherche EX-MODELI
9 & 10 novembre 2023 - FEMTO-ST Besançon

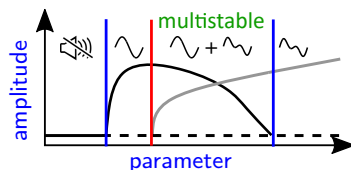
Contexte

Instruments de musique auto-oscillants : des systèmes dynamiques non linéaires

- ▶ diversité des régimes sonores ...
- ▶ ... sensibilité aux paramètres de **conception** et de **contrôle**.

Cartographie des régimes dans l'espace des paramètres :

- ▶ diagrammes de bifurcation, simulations, bancs expérimentaux contrôlés



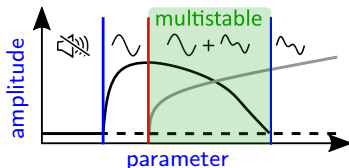
Contexte

Instruments de musique auto-oscillants : des systèmes dynamiques non linéaires

- ▶ diversité des régimes sonores ...
- ▶ ... sensibilité aux paramètres de **conception** et de **contrôle**.

Cartographie des régimes dans l'espace des paramètres :

- ▶ diagrammes de bifurcation, simulations, bancs expérimentaux contrôlés



Multistabilité : coexistence de plusieurs régimes stable pour un même jeu de paramètres

Multistabilité :

- ▶ Comment obtenir le régime souhaité ?
- ▶ Pour les instruments : question de l'influence du contrôle du musicien



Du point de vue des systèmes dynamiques :

- ▶ dépend des **conditions initiales** sur les variables.
- ▶ question des **bassins d'attraction**

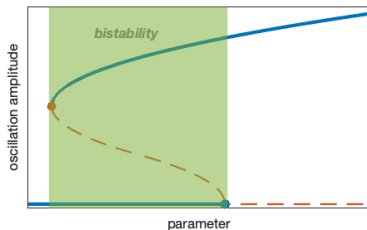


Bassins d'attraction

Bassin d'attraction d'un régime stable :

Ensemble des **conditions initiales** pour lesquelles le système converge vers ce régime quand $t \rightarrow \infty$.

Un exemple simple : système 2D

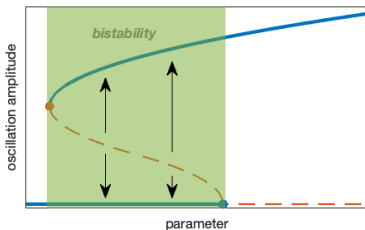


Bassins d'attraction

Bassin d'attraction d'un régime stable :

Ensemble des **conditions initiales** pour lesquelles le système converge vers ce régime quand $t \rightarrow \infty$.

Un exemple simple : système 2D

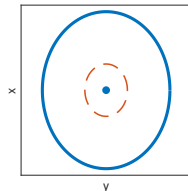
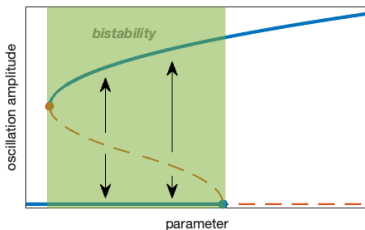


Bassins d'attraction

Bassin d'attraction d'un régime stable :

Ensemble des **conditions initiales** pour lesquelles le système converge vers ce régime quand $t \rightarrow \infty$.

Un exemple simple : système 2D

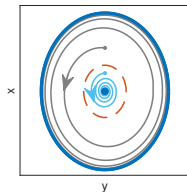
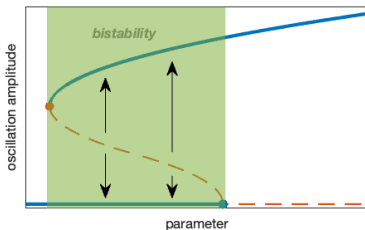


Bassins d'attraction

Bassin d'attraction d'un régime stable :

Ensemble des **conditions initiales** pour lesquelles le système converge vers ce régime quand $t \rightarrow \infty$.

Un exemple simple : système 2D



Bassins d'attraction

Pourquoi étudier les bassins d'attraction ?

- ▶ Existence et stabilité des régimes : pas suffisant pour caractériser le système
- ▶ "Facilité d'accès" aux différents régimes

Bassins d'attraction

Pourquoi étudier les bassins d'attraction ?

- ▶ Existence et stabilité des régimes : pas suffisant pour caractériser le système
- ▶ "Facilité d'accès" aux différents régimes

Intérêt plus large que pour la seule application aux instruments

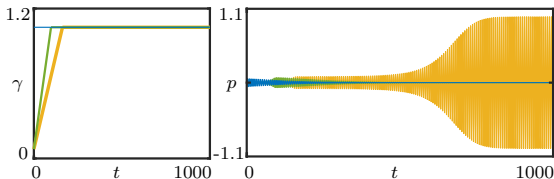
- ▶ Peu étudiés en dehors du champ des mathématiques appliquées.
- ▶ Besoin de méthodes numériques au-delà d'une approche "force brute".

Bassins d'attraction et contrôle du musicien

- ▶ En pratique, contrôler indépendamment les variables d'état n'est probablement pas trivial
- ▶ La dynamique des paramètres de contrôle permet-elle de naviguer entre les bassins ?^{1,2}

Bassins d'attraction et contrôle du musicien

- ▶ En pratique, **contrôler indépendamment les variables d'état** n'est probablement pas trivial
- ▶ La **dynamique des paramètres de contrôle** permet-elle de naviguer entre les bassins ?^{1,2}



1- Bergeot et al, *Nonlinear Dynamics*, 2013

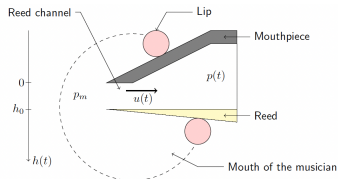
2- Vanselow et al, *Journal of Theoretical Biology*, 2019

Modèle "minimal" d'instrument à anche

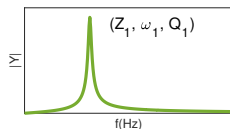
- ▶ Modèle le plus simple montrant de la multistabilité : un seul mode de résonance acoustique

excitateur

impédance d'entrée du résonateur



+



Système de deux équations différentielles ordinaires (adimensionnées) :

$$\dot{p}(t) = w(t),$$

$$\dot{w}(t) = \frac{Z_1}{Q_1} \dot{u}(t) - \frac{1}{Q_1} w(t) - p(t).$$

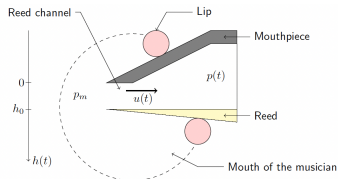
avec : $u(t) = \zeta \text{sign}(\gamma - p(t)) [1 - \gamma + p(t)] \sqrt{|\gamma - p(t)|} \cdot H(1 - \gamma + p(t))$

Modèle "minimal" d'instrument à anche

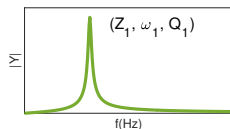
- ▶ Modèle le plus simple montrant de la multistabilité : un seul mode de résonance acoustique

excitateur

impédance d'entrée du résonateur



+



Système de deux équations différentielles ordinaires (adimensionnées) :

$$\dot{p}(t) = w(t),$$

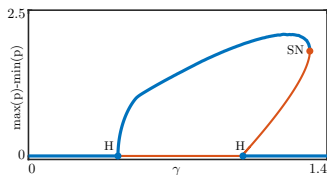
$$\dot{w}(t) = \frac{Z_1}{Q_1} \dot{u}(t) - \frac{1}{Q_1} w(t) - p(t).$$

avec :

$$u(t) = \zeta \text{sign}(\gamma - p(t)) [1 - \gamma + p(t)] \sqrt{|\gamma - p(t)|} \cdot H(1 - \gamma + p(t))$$

Analyse de bifurcations

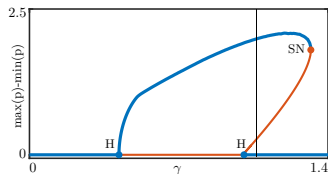
- ▶ Continuation numérique pour suivre les branches de solutions d'équilibres et de solutions périodiques, **stables** et **instables**.



- ▶ Deux bifurcations de Hopf H \rightarrow émergence de deux branches de solutions périodiques, l'une **stable**, l'autre **instable**.
- ▶ Le système est **bistable** pour $\gamma \in [1, 1.3]$

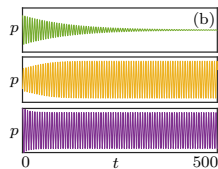
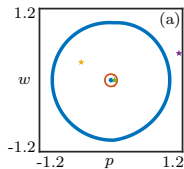
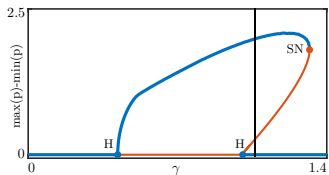
Bassins d'attraction *statiques*

- Système 2D : la solution périodique instable est la **séparatrice** (triviale) entre bassins.



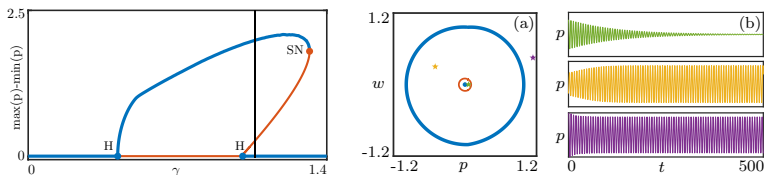
Bassins d'attraction *statiques*

- Système 2D : la solution périodique instable est la **séparatrice** (triviale) entre bassins.

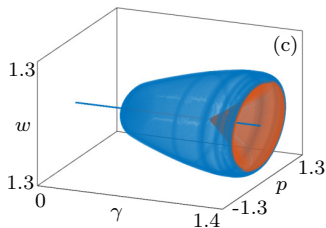


Bassins d'attraction *statiques*

- Système 2D : la solution périodique instable est la **séparatrice** (triviale) entre bassins.

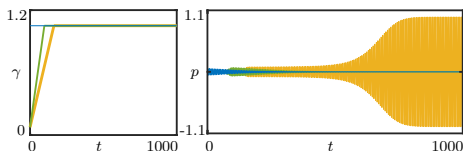


- L'analyse de bifurcation donne accès à l'évolution de la séparatrice en fonction de γ :



Cas dynamique

- ▶ Une dynamique transitoire de γ peut changer le régime observé après ce transitoire :



- ▶ Profil temporel de γ le plus simple : rampe linéaire et saturation

$$\gamma(t) = \gamma_0 + st \quad \text{if } t < t_c$$

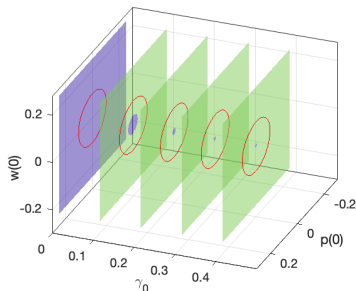
$$\gamma(t) = \gamma_t \quad \text{if } t \geq t_c$$

- ▶ Exploration systématique, en simulation, de l'influence de la valeur initiale γ_0 , de la valeur cible γ_t de γ et de la pente s .

Quelle(s) méthode(s) numérique(s) ?

► 1^{re} option : force brute

- très grand nombre de simulations sur une grille de conditions initiales



solution d'équilibre

solution périodique

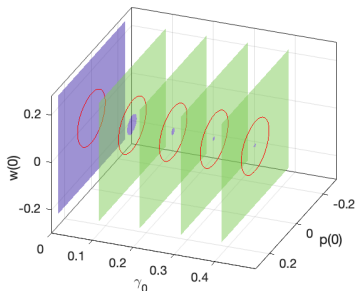
Séparatrice entre bassins *statiques*

- Temps de calcul très long ! Pas adapté à une étude systématique.

Quelle(s) méthode(s) numérique(s) ?

► 1^{re} option : force brute

- très grand nombre de simulations sur une grille de conditions initiales



solution d'équilibre
solution périodique
Séparatrice entre bassins *statiques*

- Temps de calcul très long ! Pas adapté à une étude systématique.
- ## ► 2^{nde} option : Support-Vector Machine (SVM) et maillage adaptatif ¹
- Estimer la frontière entre bassins (algorithme de classification)

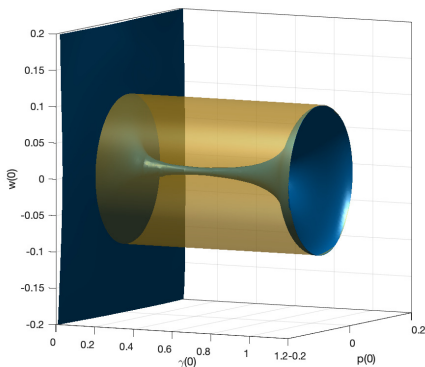
1- Doc, Vergez, Missoum (2014), Acta Acustica united with Acustica, 100(3), 543-554.

Bassins d'attraction dynamiques

Valeur cible $\gamma_t = 1.05$
Transitoire d'attaque lent
($s=0.006$)

Surface bleue : Frontière entre bassins dynamiques

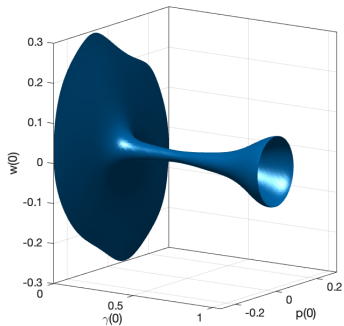
Surface jaune : Extension de la frontière entre bassins statiques



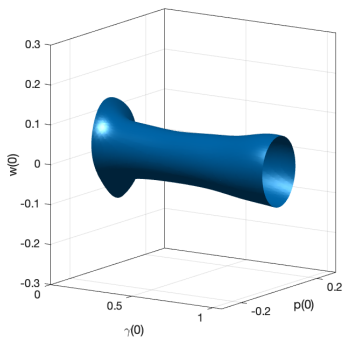
- ▶ La **dynamique de γ** affecte considérablement l'**observabilité** des régimes.
- ▶ Pour certaines valeurs de $\gamma(0)$: un régime devient **très difficile à attendre** en pratique !

Influence de la pente s

$s = 0.01$

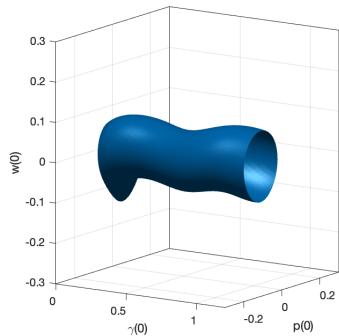


$s = 0.05$

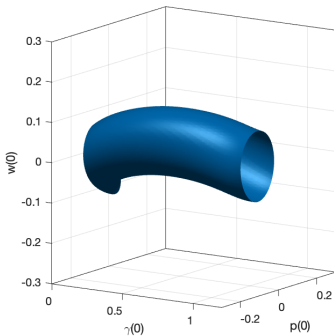


Influence de la pente s

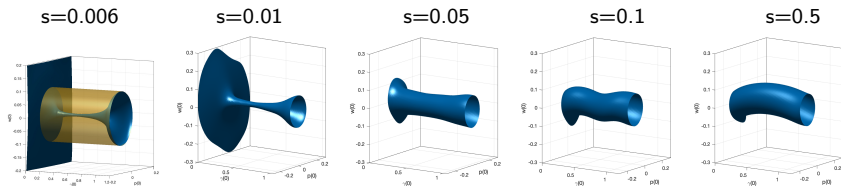
$s = 0.1$



$s = 0.5$



Influence de la pente s



Observations contre-intuitives (à première vue)

- ▶ Bassins moins affectés par des transitoires rapides que par des transitoires lents (pas de "quasi staticité")
- ▶ Influence de la dynamique de γ liée à la séparation des échelles de temps

Conclusions et travaux futurs

- ▶ Bassins d'attraction :
 - essentiels mais très peu étudiés
 - liés à *l'observabilité / la jouabilité* des régimes.
- ▶ Influence forte de la dynamique de γ , liée aux transitoires d'attaque du musicien
 - Les *basins statiques* ne sont pas suffisants pour décrire l'observabilité
 - Certains régimes, bien que stables, peuvent devenir très difficiles à atteindre en pratique.
- ▶ Perspectives :
 - Profils de transitoires de γ plus réalistes
 - Identifier la séparatrice entre bassins dynamiques → analyse lente rapide
 - Validation expérimentale