

# Journées annuelles du GdR EX-MODELI

17-18 octobre 2024 / INSA, Lyon



## Journées annuelles du GdR EX-MODELI

**Bienvenue à l'INSA de Lyon pour les journées du GdR !**



# Journées annuelles du GdR EX-MODELI

## Bienvenue à l'INSA de Lyon pour les journées du GdR !

### 17 octobre

journée scientifique sur les thèmes de recherche développés par C.-H. Lamarque

- Modes non linéaires  
*C. Touzé et O. Thomas*
- Absorbeur de vibration non linéaire  
*P.-O. Mattei; A. Ture Savadkoohi, B. Vaurigaud, M. Weiss et Z. Dimitrijevic*
- Dynamique non lisse  
*B. Brogliato; S. Junca, G. James, J. Bastien et C. Bertrand*
- Applications  
*O. Dazel, É. Gourdon et S. Baguet*

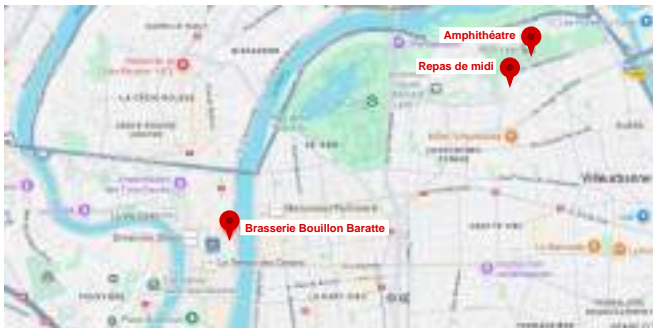
### 18 octobre

présentations des travaux effectués dans les laboratoires

- Matin : Axes 1, 2, 3 : exploitation des non-linéarités, analyse et couplages piézoélectriques  
*A. Haudeville, R. Zhang, X. Zixu, A. Stabile, É. Gourc, A. Faulconnier, M. Wijnand, T. Passa*
- Après-midi : Axe 3 : aspects numériques  
*D. Dureisseix, L. Salles, V. Mahé, A. Chukwu, É. Capiez-Lernout, É. Jacquelin*

## Quelques informations pratiques

- Repas du midi : **CARTE D'IDENTITÉ**  
*restaurant CNRS La table d'Einstein, 2 avenue Albert Einstein à Villeurbanne*
- Repas jeudi soir :  
*Brasserie Bouillon Baratte, 25 rue du Bât d'Argent*
- un grand merci aux organisateurs : bureau du GdR, organisateurs locaux  
(S. Baguet, É. Gourdon, ...)



## Le GdR EX-MODELI

### ▷ Contexte :

- Suite du GdR DYNOLIN, 2011-2014 et 2015-2018
- Équipe :
  - Émeline SADOULET-REBOUL, Univ. Franche-Comté, FEMTO-ST
  - Enora DENIMAL-GOY, INRIA Palaiseau
  - Olivier THOMAS, Arts et Métiers, Lille, LISPEN
  - Cyril TOUZÉ, ENSTA, IMSIA
- 29 laboratoires mentionnés dans le dossier (liste non exhaustive)

### ▷ Objectifs :

- Mission 1 : *Fédérer la communauté scientifique et industrielle*
- Mission 2 : *Diffuser et Innover*
- Mission 3 : *Former les jeunes étudiants et chercheurs*

### ▷ Labellisation CNRS :

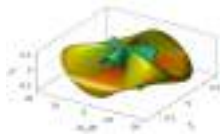
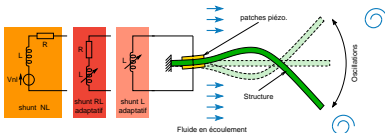
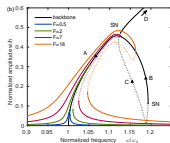
↪ Rattaché à l'INSIS, à partir de Janvier 2023, pour 5 ans

### ▷ Contacts :

- Mailing list : [gdr-exmodeli@groupes.renater.fr](mailto:gdr-exmodeli@groupes.renater.fr)
- Bureau : [gdr-exmodeli-bureau@groupes.renater.fr](mailto:gdr-exmodeli-bureau@groupes.renater.fr)



## Structuration scientifique



### ▷ Axe 1 : Exploitation des non-linéarités

- Tirer profit des non-linéarités pour améliorer ou innover
- Applications en contrôle vibratoire ou acoustique, en récupération d'énergie, . . .

### ▷ Axe 2 : Maîtrise des couplages multi-physiques

↪ Étudier les couplages entre mécanique et autres physiques : piézoélectricité, électrostatiques, fluide-structure, électromagnétiques . . .

### ▷ Axe 3 : Méthodes d'analyse expérimentales et numériques de systèmes non linéaires

- Aspects numériques : réduction de modèle, méthodes de résolution, traitement des non-linéarités non régulières, méthodes de continuation, intégration des incertitudes . . .
- Aspects expérimentaux : continuation expérimentale, identification, mesure de champ, identification probabiliste . . .

## Actions du GdR EX-MODELI

### ▷ Passées :

- Séminaire en ligne **Steve Shaw** Florida State Univ., 21 sep. 2023
- Journée annuelle 2023. 9-10 novembre 2023, **Besançon**.
- Séminaire en ligne **Arnaud Lazarus**, IJLRDA / Harvard, 14 mars 2024
- Séminaire en ligne **Alessandra Vizzaccaro**, Univ. Exeter, 27 juin 2024



## Actions du GdR EX-MODELI

### ▷ Passées :

- Séminaire en ligne **Steve Shaw** Florida State Univ., 21 sep. 2023
- Journée annuelle 2023. 9-10 novembre 2023, **Besançon**.
- Séminaire en ligne **Arnaud Lazarus**, IJLRDA / Harvard, 14 mars 2024
- Séminaire en ligne **Alessandra Vizzaccaro**, Univ. Exeter, 27 juin 2024

### ▷ Participation financière :

Journées “Dynamique non linéaire” en l’honneur de Bruno Cochelin et Pierre-Olivier Mattei (Marseille LMA, 6,7 juin 2024)





## Actions du GdR EX-MODELI

### ▷ Passées :

- Séminaire en ligne **Steve Shaw** Florida State Univ., 21 sep. 2023
- Journée annuelle 2023. 9-10 novembre 2023, **Besançon**.
- Séminaire en ligne **Arnaud Lazarus**, IJLRDA / Harvard, 14 mars 2024
- Séminaire en ligne **Alessandra Vizzaccaro**, Univ. Exeter, 27 juin 2024

### ▷ Participation financière :

Journées “Dynamique non linéaire” en l’honneur de Bruno Cochelin et Pierre-Olivier Mattei (Marseille LMA, 6,7 juin 2024)

### ▷ Prochains évènements :

Séminaires en ligne :

- **jeudi 28 Novembre 2024, 16h** : *Formulations projectives en analyse vibratoire non régulière*, **Mathias Legrand**, McGill University.
- **jeudi 23 Janvier 2025**, horaire à confirmer, titre à venir :  
**Eleni Chatzi**, ETH Zürich.

## Claude-Henri Lamarque

- 1985 : Ingénieur TPE
- 1985 : DEA en mathématique appliquée, université de St. Étienne
- 1988 : Agrégation de mathématiques
- 1992 : thèse de doctorat “Contribution à la modélisation et l’identification des systèmes mécaniques non linéaires” École Centrale de Lyon (dir. L. Jézéquel)
- 1998 : HDR Univ. Cl. Bernard, Lyon
- Professeur (enseignant / chercheur) à TPE, directeur de 24 thèses ? 194 publications sur scopus...
- 2002-2022 : directeur de laboratoire / d’équipe LTDS 2002-2022 à TPE
- Éditeur associé de revues, membre du comité ENOC. . .
- 2002- : grand animateur de la dynamique non-linéaire (cf. ci-après) !

## Groupe “non linéaire”...

### ▷ Les prémices

- vendredi 20 septembre 2002 : 1<sup>re</sup> journée à TPE (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, F. Thouverez, J.-J. Sinou, C. Touzé, O. Thomas...)

## Groupe “non linéaire”...

### ▷ Les prémices

- vendredi 20 septembre 2002 : 1<sup>re</sup> journée à TPE (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, F. Thouverez, J.-J. Sinou, C. Touzé, O. Thomas...)

**Journée Modes Non Linéaires**  
20 Septembre 2002  
ENTPE  
C.-H. Lamarque

Collaboration de M. Mouton et A. Berthoin  
Centre National de la Recherche Scientifique

**Opération de Recherche : Vibrations Non-Linéaires**  
4E  
**Les Modes Couplés Non-Linéaires en vibrations**  
S. Belizzi

**Vibrations non linéaires : les phénomènes mécaniques énergétiques complexes et multifractal**

1. Méthodes analytiques pour les systèmes  
2. Méthodes numériques de vibrations  
3. Les applications industrielles des phénomènes de couplage...

**Modes couplés non linéaires - cas des 2 degrés de liberté**

1. Équations gouvernantes sous une forme normale  
2. Formes algébriques de vibrations  
3. Les applications industrielles des phénomènes de couplage...

**Formules :**

$$N_1 + i\delta_1 \dot{N}_1 - \kappa_1 N_1 + \alpha_1 N_1^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{1jk} \dot{X}_j X_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n G_{1jk} X_j X_k + \dots$$

## Groupe “non linéaire”...

### ▷ Les prémices

- vendredi 20 septembre 2002 : 1<sup>re</sup> journée à TPE (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, F. Thouverez, J.-J. Sinou, C. Touzé, O. Thomas...)
- en 2003 : 2<sup>e</sup> journée au LMA Marseille (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, R. Bouc, C. Touzé, O. Thomas...)

## Groupe “non linéaire”...

### ▷ Les prémices

- vendredi 20 septembre 2002 : 1<sup>re</sup> journée à TPE (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, F. Thouverez, J.-J. Sinou, C. Touzé, O. Thomas...)
- en 2003 : 2<sup>e</sup> journée au LMA Marseille (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, R. Bouc, C. Touzé, O. Thomas...)

### ▷ La concrétisation internationale

- 7–9 juin 2004 : Euromech Colloquium 457 : Non-linear modes of vibrating systems (Fréjus, France)



## Groupe “non linéaire” . . .

### ▷ Les prémices

- vendredi 20 septembre 2002 : 1<sup>re</sup> journée à TPE (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, F. Thouverez, J.-J. Sinou, C. Touzé, O. Thomas. . . )
- en 2003 : 2<sup>e</sup> journée au LMA Marseille (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, R. Bouc, C. Touzé, O. Thomas. . . )

### ▷ La concrétisation internationale

- 7–9 juin 2004 : Euromech Colloquium 457 : Non-linear modes of vibrating systems (Fréjus, France)
- le premier d’une belle série : Samos 2006, Frascati 2009, Haifa 2012, Istanbul 2014, Liège 2016, Marseille 2019, Ascona 2021

## Groupe “non linéaire”...

### ▷ Les prémices

- vendredi 20 septembre 2002 : 1<sup>re</sup> journée à TPE (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, F. Thouverez, J.-J. Sinou, C. Touzé, O. Thomas...)
- en 2003 : 2<sup>e</sup> journée au LMA Marseille (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, R. Bouc, C. Touzé, O. Thomas...)

### ▷ La concrétisation internationale

- 7–9 juin 2004 : Euromech Colloquium 457 : Non-linear modes of vibrating systems (Fréjus, France)
- le premier d’une belle série : Samos 2006, Frascati 2009, Haifa 2012, Istanbul 2014, Liège 2016, Marseille 2019, Ascona 2021
- puis ENOC 2020 ~~~ 2022





## Groupe “non linéaire”...

### ▷ Les prémices

- vendredi 20 septembre 2002 : 1<sup>re</sup> journée à TPE (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, F. Thouverez, J.-J. Sinou, C. Touzé, O. Thomas...)
- en 2003 : 2<sup>e</sup> journée au LMA Marseille (CHL, B. Cochelin, S. Belizzi, R. Bouc, C. Touzé, O. Thomas...)

### ▷ La concrétisation internationale

- 7–9 juin 2004 : Euromech Colloquium 457 : Non-linear modes of vibrating systems (Fréjus, France)
- le premier d’une belle série : Samos 2006, Frascati 2009, Haifa 2012, Istanbul 2014, Liège 2016, Marseille 2019, Ascona 2021
- puis ENOC 2020 ~~~ 2022

### ▷ GdR DYNOLIN (2011–2018)

- Une rencontre annuelle (1-2 jours) avec exposés scientifiques / tutoriaux
- Une école d’été à Fréjus en 2018



## À Fréjus en 2018, harassante discussion sur ENOC 2020 à venir...



## ... concrétisé en un succès interplanétaire en 2022



## ENOC encore...

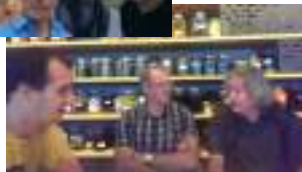
Lyon 2022



Vienne 2014



Budapest 2017



## Organisateur d'événements



## Quelques co-auteurs. . .



pour 194 publications

## Quelques sujets...



pour 190 publications

## Quelques pionniers des modes non linéaires !



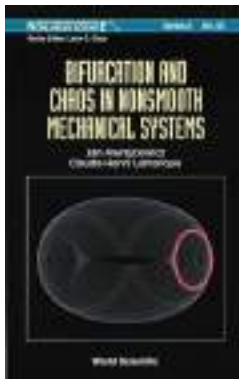
ENOC 2008  
Saint Petersburg



ENOC 2022  
Lyon



## Trois ouvrages





## Pour terminer !



**CHL:**  
**Science de qualité**  
**Don de soi**  
**pour l'animation**  
**administrative**  
**et scientifique**

# Modes non linéaires et forme normale: des premières briques aux développements actuels

Cyril Touzé    Olivier Thomas

ENSTA Paris / IMSIA, Palaiseau

*cyril.touze@ensta-paris.fr*

Arts et Métiers Institute of Technology, Lille

*olivier.thomas@ensam.eu*



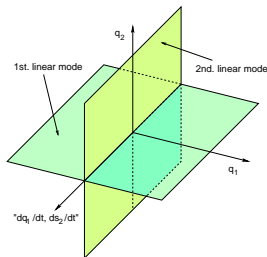
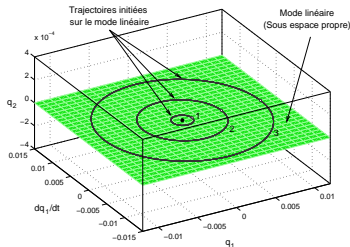
## Modes non linéaires : objectifs

*Étendre au cadre non linéaire le concept de mode propre "linéaire"*

▷ Modes d'un système conservatif linéaire

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0$$

- oscillations **periodiques**
- **invariance** du mouvement (grâce à l'**orthogonalité**)



## Modes non linéaires : objectifs

*Étendre au cadre non linéaire le concept de mode propre "linéaire"*

### ▷ Modes d'un système conservatif linéaire

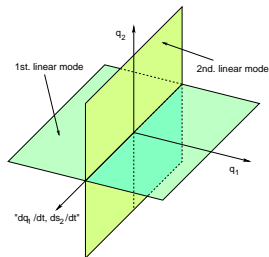
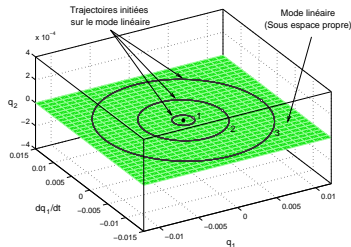
$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0$$

- oscillations **periodiques**
- **invariance** du mouvement (grâce à l'**orthogonalité**)

### ▷ Modes d'un système linéaire dissipatif

$$(K + j\omega C - \omega^2 M)\Phi = 0$$

- oscillations **amorties**
- **invariance** du mouvement (grâce à l'**orthogonalité**)



## Modes non linéaires : objectifs

*Étendre au cadre non linéaire le concept de mode propre "linéaire"*

### ▷ Modes d'un système conservatif linéaire

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0$$

- oscillations **periodiques**
- **invariance** du mouvement (grâce à l'**orthogonalité**)

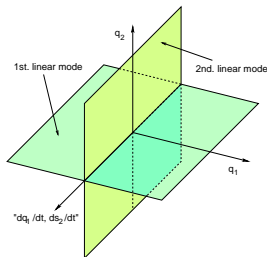
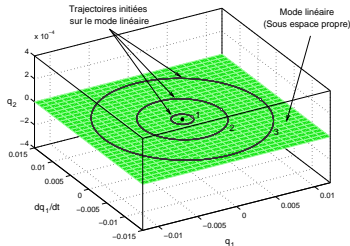
### ▷ Modes d'un système linéaire dissipatif

$$(K + j\omega C - \omega^2 M)\Phi = 0$$

- oscillations **amorties**
- **invariance** du mouvement (grâce à l'**orthogonalité**)

### ▷ Dans l'espace des phases

- ↪ trajectoires elliptiques / spirale dans les plans  $(q_i, v_i)$
- ↪ un mode "linéaire" est un sous-espace plan



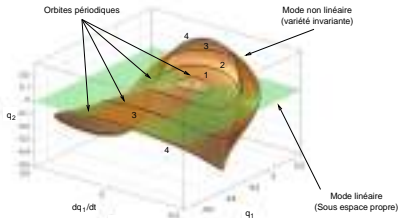
## Modes non linéaires : définition

### ▷ Système conservatif :

$$M\ddot{q} + f_c(q) = 0$$

Two **equivalent** definitions :

- “A CNM is a family of **periodic** orbits”  
[Lyapunov 1907, Rosenberg, 1960, Vakakis, Manevitch, Mikhlin, Kerschen 1996-]  
↪ computation & reference solutions
- “A CNM is a 2D **invariant** manifold, tangent at the origin to the linear eigen-planes”  
[Shaw, Pierre, 1991-]  
↪ model reduction





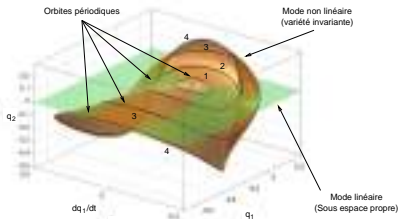
## Modes non linéaires : définition

### ▷ Système conservatif :

$$M\ddot{q} + f_c(q) = 0$$

Two **equivalent** definitions :

- “A CNM is a family of **periodic** orbits”  
[Lyapunov 1907, Rosenberg, 1960, Vakakis, Manevitch, Mikhlin, Kerschen 1996-]  
↪ computation & reference solutions
- “A CNM is a 2D **invariant** manifold, tangent at the origin to the linear eigen-planes”  
[Shaw, Pierre, 1991-]  
↪ model reduction



### ▷ Système dissipatif :

$$M\ddot{q} + f_d(q) + f_c(q) = 0$$

Several **non equivalent** definitions :

- invariant manifold [Shaw, Pierre, 1991-], [Touzé *et al* 2004-], [Haller group]
- periodic orbits with negative damping, damped Fourier series, phase resonance . . .

## Théorie des formes normales

- Idée de fond de la forme normale (Poincaré, 1892) :  
Pour un système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , peut-on trouver un changement de variables non linéaire  $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , de telle sorte que le système dynamique résultant  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ , soit linéaire ?
- Théorie locale, au voisinage d'un point fixe  $\mathbf{x}_0$  tel que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .
- changement de variables *complet* :  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de même taille.

## Théorie des formes normales

- Idée de fond de la forme normale (Poincaré, 1892) :  
Pour un système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , peut-on trouver un changement de variables non linéaire  $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , de telle sorte que le système dynamique résultant  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ , soit linéaire ?
- Théorie locale, au voisinage d'un point fixe  $\mathbf{x}_0$  tel que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .
- changement de variables *complet* :  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de même taille.
- Résultats fondamentaux
  - Théorème de Poincaré : s'il n'existe pas de **relation de résonances** entre les valeurs propres de la matrice jacobienne au point fixe  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , alors la réponse est oui.
  - Théorème de Poincaré-Dulac : s'il existe des relations de résonance interne, le système peut être substantiellement simplifié. A l'issue du changement de variable, on obtient la **forme normale** du système qui ne contient **que les monômes résonants**.

## Relations de résonance et monômes résonnants

Soient  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  les  $n$  valeurs propres du point fixe  $\mathbf{x}_0$ .

### ▷ Relations de résonance d'ordre $p$

$$\lambda_j = \sum_i^n n_i \lambda_i, \quad n_i \geq 0, \quad \sum_i^n n_i = p.$$

### ▷ Monôme résonnant

La relation de résonance est directement liée au **monôme résonnant**

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} :$$

$$\text{dynamique (eq. } j \text{)} : \quad \dot{x}_j = \lambda_j x_j + \dots + \gamma_j^{\mathbf{n}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$$

## Relations de résonance et monômes résonnants

Soient  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  les  $n$  valeurs propres du point fixe  $\mathbf{x}_0$ .

### ▷ Relations de résonance d'ordre $p$

$$\lambda_j = \sum_i^n n_i \lambda_i, \quad n_i \geq 0, \quad \sum_i^n n_i = p.$$

### ▷ Monôme résonnant

La relation de résonance est directement liée au **monôme résonnant**

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} :$$

$$\text{dynamique (eq. } j \text{)} : \quad \dot{x}_j = \lambda_j x_j + \dots + \gamma_j^{\mathbf{n}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$$

$$\text{sol. linéaire : } x_j \simeq e^{\lambda_j t} \quad \text{à l'ordre le plus bas}$$

## Relations de résonance et monômes résonnants

Soient  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  les  $n$  valeurs propres du point fixe  $\mathbf{x}_0$ .

▷ **Relations de résonance d'ordre  $p$**

$$\lambda_j = \sum_i^n n_i \lambda_i, \quad n_i \geq 0, \quad \sum_i^n n_i = p.$$

▷ **Monôme résonnant**

La relation de résonance est directement liée au **monôme résonnant**

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} :$$

$$\text{dynamique (eq. } j \text{)} : \quad \dot{x}_j = \lambda_j x_j + \dots + \gamma_j^{\mathbf{n}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$$

$$\text{sol. linéaire : } \quad x_j \simeq e^{\lambda_j t} \quad \text{à l'ordre le plus bas}$$

$$\text{monôme résonnant : } \quad x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} \sim e^{(n_1 \lambda_1 + \dots + n_d \lambda_d) t}$$

## Relations de résonance et monômes résonnants

Soient  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  les  $n$  valeurs propres du point fixe  $\mathbf{x}_0$ .

### ▷ Relations de résonance d'ordre $p$

$$\lambda_j = \sum_i^n n_i \lambda_i, \quad n_i \geq 0, \quad \sum_i^n n_i = p.$$

### ▷ Monôme résonnant

La relation de résonance est directement liée au **monôme résonnant**

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} :$$

$$\text{dynamique (eq. } j) : \quad \dot{x}_j = \lambda_j x_j + \dots + \gamma_j^{\mathbf{n}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$$

$$\text{sol. linéaire : } x_j \simeq e^{\lambda_j t} \quad \text{à l'ordre le plus bas}$$

$$\text{monôme résonnant : } x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} \sim e^{(n_1 \lambda_1 + \dots + n_d \lambda_d) t}$$

### ▷ Idées fortes de la forme normale

- squelette de la dynamique. Modèles ex-nihilo.
- Largement utilisé pour la théorie des bifurcations.

## Relations de résonance et monômes résonnants

Soient  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  les  $n$  valeurs propres du point fixe  $\mathbf{x}_0$ .

### ▷ Relations de résonance d'ordre $p$

$$\lambda_j = \sum_i^n n_i \lambda_i, \quad n_i \geq 0, \quad \sum_i^n n_i = p.$$

### ▷ Monôme résonnant

La relation de résonance est directement liée au **monôme résonnant**

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} :$$

$$\text{dynamique (eq. } j) : \quad \dot{x}_j = \lambda_j x_j + \dots + \gamma_j^{\mathbf{n}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$$

$$\text{sol. linéaire : } x_j \simeq e^{\lambda_j t} \quad \text{à l'ordre le plus bas}$$

$$\text{monôme résonnant : } x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} \sim e^{(n_1 \lambda_1 + \dots + n_d \lambda_d) t}$$

### ▷ Idées fortes de la forme normale

- squelette de la dynamique. Modèles ex-nihilo.
- Largement utilisé pour la théorie des bifurcations.
- Lien avec la réduction de modèles (et les modes non linéaires) ?



## Forme normale et modes non linéaires

*Journal of Sound and Vibration* (1991) **149**(3), 429-458

### ANALYSIS OF NON-LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS BY THE NORMAL FORM THEORY

L. JEZOUËT

Département de Mécanique des Solides, Ecole Centrale de Lyon, 69131, Ecully Cedex, France

AND

C. H. LAMARQUE

Centre National des Travaux Publics de l'ENL, F-69118, Vaulx-en-Velin, Cedex, France

(Received 28 June 1989, and in revised form 28 September 1990)

- premier lien entre forme normale et modes non linéaires
- avant même le premier article de S. Shaw et C. Pierre faisant le lien entre modes non linéaires et variété invariante (soumis le 4/01/1991, publié volume 150(1)).

## Forme normale et modes non linéaires

### ▷ Ce qu'il y a dans l'article de 1991

- utilisation de la forme normale complexe, la partie linéaire est diagonalisée avec  $\{\pm i\omega\}$  sur la diagonale
- lien avec la *réduction* et les modes non linéaires (à la Rosenberg)
- Calcul automatique à des ordres arbitraires déjà mentionné. Lien avec les techniques perturbatives et l'introduction d'un petit paramètre  $\varepsilon$ . Calculs à l'ordre 5 sur un Duffing sans/avec amortissement. Amortissement traité via un désaccord.
- cas de la résonance 1 :1. Cas forcé esquissé avec déjà l'apparition de termes d'ordre supérieur en forçage.

## Forme normale et modes non linéaires

### ▷ Ce qu'il y a dans l'article de 1991

- utilisation de la forme normale complexe, la partie linéaire est diagonalisée avec  $\{\pm i\omega\}$  sur la diagonale
- lien avec la *réduction* et les modes non linéaires (à la Rosenberg)
- Calcul automatique à des ordres arbitraires déjà mentionné. Lien avec les techniques perturbatives et l'introduction d'un petit paramètre  $\varepsilon$ . Calculs à l'ordre 5 sur un Duffing sans/avec amortissement. Amortissement traité via un désaccord.
- cas de la résonance 1 :1. Cas forcé esquissé avec déjà l'apparition de termes d'ordre supérieur en forçage.

### ▷ Ce qui n'est pas encore clairement établi

- lien avec la réduction à la variété centrale et les modes non linéaires comme variété invariante.
- Calcul générique pour l'amortissement et le forçage.

## Forme normale et modes non linéaires

### ▷ Ce qu'il y a dans l'article de 1991

- utilisation de la forme normale complexe, la partie linéaire est diagonalisée avec  $\{\pm i\omega\}$  sur la diagonale
- lien avec la *réduction* et les modes non linéaires (à la Rosenberg)
- Calcul automatique à des ordres arbitraires déjà mentionné. Lien avec les techniques perturbatives et l'introduction d'un petit paramètre  $\varepsilon$ . Calculs à l'ordre 5 sur un Duffing sans/avec amortissement. Amortissement traité via un désaccord.
- cas de la résonance 1 :1. Cas forcé esquissé avec déjà l'apparition de termes d'ordre supérieur en forçage.

### ▷ Ce qui n'est pas encore clairement établi

- lien avec la réduction à la variété centrale et les modes non linéaires comme variété invariante.
- Calcul générique pour l'amortissement et le forçage.

↪ déjà presque tout était écrit ! Pourtant le lien NNM-forme normale est resté un point à peine développé au cours des années ultérieures...

## Modes non linéaires : les travaux de Shaw et Pierre

- Quelques mois plus tard : S. Shaw et C. Pierre définissent un mode non linéaire comme variété invariante tangente au sous-espace propre linéaire.

[S. Shaw and C. Pierre : nonlinear normal modes as invariant manifolds, Journal of sound and Vibration 150 (1), 170-173, 1991]

[S. Shaw and C. Pierre : normal mods for nonlinear vibratory systems, Journal of sound and Vibration 164 (1), 85-124, 1993]

- Utilisation de la technique de réduction à la variété centrale. Eqs de départ :

$$\dot{x}_p = y_p$$

$$\dot{y}_p = -\omega_p^2 x_p - f_p(x_1, \dots, x_N),$$

Soit  $(x_m, y_m)$  les variables maitres. On cherche une relation non linéaire :

$$x_s = U_s(x_m, y_m),$$

$$y_s = V_s(x_m, y_m).$$

avec  $(U_s, V_s)$  des fonctions inconnues à déterminer (analytiquement, numériquement).

## Modes non linéaires : les travaux de Shaw et Pierre

- Quelques mois plus tard : S. Shaw et C. Pierre définissent un mode non linéaire comme variété invariante tangente au sous-espace propre linéaire.

[S. Shaw and C. Pierre : nonlinear normal modes as invariant manifolds, *Journal of sound and Vibration* 150 (1), 170-173, 1991]

[S. Shaw and C. Pierre : normal mods for nonlinear vibratory systems, *Journal of sound and Vibration* 164 (1), 85-124, 1993]

- Utilisation de la technique de réduction à la variété centrale. Eqs de départ :

$$\dot{x}_p = y_p$$

$$\dot{y}_p = -\omega_p^2 x_p - f_p(x_1, \dots, x_N),$$

Soit  $(x_m, y_m)$  les variables maitres. On cherche une relation non linéaire :

$$x_s = U_s(x_m, y_m),$$

$$y_s = V_s(x_m, y_m).$$

avec  $(U_s, V_s)$  des fonctions inconnues à déterminer (analytiquement, numériquement).

- Optique de réduction claire. Elimination des variables esclaves.
- Utilisation des variables originales (et réelles).
- pas de lien avec la forme normale.

## La forme normale oscillateur

- En 2002-2006 : calcul d'une forme normale à l'ordre 3 utilisant les coordonnées réelles et conservant les équations sous forme d'oscillateurs.

[C. Touzé, O.Thomas and A. Chaigne : Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes, *Journal of Sound and Vibration*, vol 273, No 1-2, pp 77-101, 2004.]

[C. Touzé and M. Amabili : Non-linear normal modes for damped geometrically non-linear systems : application to reduced-order modeling of harmonically forced structures, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, No. 4-5, pp. 958-981, 2006.]

- la partie linéaire n'est pas diagonalisée mais laissée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_p^2 & 0 \end{pmatrix}$$

- permet des comparaisons terme à terme avec les résultats de Shaw et Pierre.
- lien avec les MNL comme variétés invariantes. Cependant l'exacte compréhension et équivalence entre les deux méthodes n'est pas rigoureusement établie.

## La méthode de paramétrisation des variétés invariantes

- Introduite en 2003-2005 dans un cadre abstrait

[X. Cabré, E. Fontich, R. de la Llave : The parameterization method for invariant manifolds. I. Indiana Univ. Math. J. 52(2), 2003]

[X. Cabré, E. Fontich, R. de la Llave : The parameterization method for invariant manifolds. III. J. Differ. Equ. 218(2), 2005]

- Fait le lien entre les méthodes variété centrale / forme normale



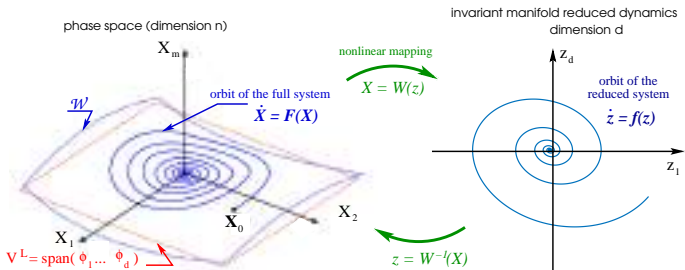
## La méthode de paramétrisation des variétés invariantes

- Introduite en 2003-2005 dans un cadre abstrait

[X. Cabré, E. Fontich, R. de la Llave : The parameterization method for invariant manifolds. I. Indiana Univ. Math. J. 52(2), 2003]

[X. Cabré, E. Fontich, R. de la Llave : The parameterization method for invariant manifolds. III. J. Differ. Equ. 218(2), 2005]

- Fait le lien entre les méthodes variété centrale / forme normale
- idée générale, pour un système dynamique  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  au voisinage d'un point fixe  $\mathbf{X}_0$  tq  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$  :
  - relation nonlinéaire entre les variables originales  $\mathbf{X}$  (taille  $n$ ) et des variables *normales*  $\mathbf{z}$  (taille  $d \ll n$ ) :  $\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mathbf{z})$
  - dynamique réduite sur la variété invariante :  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$



## La méthode de paramétrisation des variétés invariantes

- L'équation d'invariance :

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{W} = D\mathbf{W} \cdot \mathbf{f}$$

- Développements asymptotiques

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}) = \mathbf{L}\mathbf{z} + \sum_{k \geq 2} \mathbf{W}_k(\mathbf{z}), \quad \text{avec } \mathbf{L} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_d]$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{\Lambda}_L \mathbf{z} + \sum_{k \geq 2} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}), \quad \text{avec } \mathbf{\Lambda}_L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

## La méthode de paramétrisation des variétés invariantes

- L'équation d'invariance :

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{W} = D\mathbf{W} \cdot \mathbf{f}$$

- Développements asymptotiques

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}) = \mathbf{L}\mathbf{z} + \sum_{k \geq 2} \mathbf{W}_k(\mathbf{z}), \quad \text{avec } \mathbf{L} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_d]$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{\Lambda}_L \mathbf{z} + \sum_{k \geq 2} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}), \quad \text{avec } \mathbf{\Lambda}_L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

- Équations homologiques d'ordre  $p$  :  $[D\mathbf{W}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z})]_p = [\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{z}))]_p$   
 $\leadsto$  sous-déterminées

## La méthode de paramétrisation des variétés invariantes

- L'équation d'invariance :

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{W} = D\mathbf{W} \cdot \mathbf{f}$$

- Développements asymptotiques

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}) = \mathbf{L}\mathbf{z} + \sum_{k \geq 2} \mathbf{W}_k(\mathbf{z}), \quad \text{avec } \mathbf{L} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_d]$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{\Lambda}_L \mathbf{z} + \sum_{k \geq 2} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}), \quad \text{avec } \mathbf{\Lambda}_L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

- Équations homologiques d'ordre  $p$  :  $[D\mathbf{W}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z})]_p = [\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{z}))]_p$   
 $\leadsto$  sous-déterminées
- Deux types de solutions qui correspondent à deux paramétrisations différentes :
  - style fonctionnel (*graph style*) : équivalent à la réduction à la variété centrale
  - style forme normale : calcul d'une forme normale partielle sur les modes maîtres uniquement.

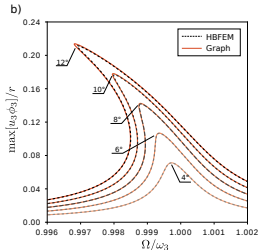
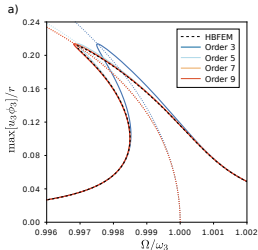
## La méthode de paramétrisation directe

- Calcul *directement* applicable aux problèmes éléments finis (DPIM)

[A. Vizzaccaro, A. Opreni, L. Salles, A. Frangi and C. Touzé : High order direct parametrisation of invariant manifolds for model order reduction of finite element structures, *Nonlinear Dynamics*, 110, 525-571, 2022.]

[A. Vizzaccaro, G. Gobat, A. Frangi and C. Touzé : Direct parametrisation of invariant manifolds for forced non-autonomous systems including superharmonic resonances, *Nonlinear Dynamics*, 112, 6255-6290, 2024.]

- développement à un ordre arbitraire
- choix du style de paramétrisation (graph style, complex normal form style)



## Les limites de validité

- Forme normale : théorie locale. Limite de validité en terme d'amplitude.
- Développement d'un critère de validité pour les formes normales

[C.-H. Lamarque, C. Touzé and O. Thomas : An upper bound for validity limits of asymptotic analytical approaches based on normal form theory, *Nonlinear Dynamics*, vol. 70(3), 1931-1949, 2012.]

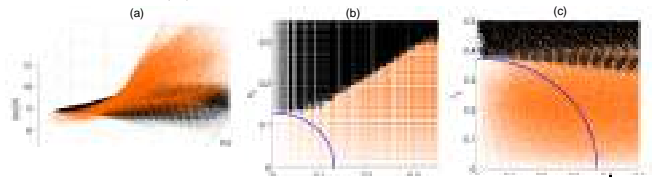
## Les limites de validité

- Forme normale : théorie locale. Limite de validité en terme d'amplitude.
- Développement d'un critère de validité pour les formes normales

[C.-H. Lamarque, C. Touzé and O. Thomas : An upper bound for validity limits of asymptotic analytical approaches based on normal form theory, *Nonlinear Dynamics*, vol. 70(3), 1931-1949, 2012.]

- Idée de fond : dans les équations homologiques, apparition de l'opérateur  $\mathbf{I} + \partial\Phi(\mathbf{u})$ , où  $\mathbf{u}$  est la variable normale ( $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u})$ ) que l'on "cherche" à inverser.

↪ les zéros de  $\mathbf{I} + \partial\Phi(\mathbf{u})$  marquent la limite de validité.



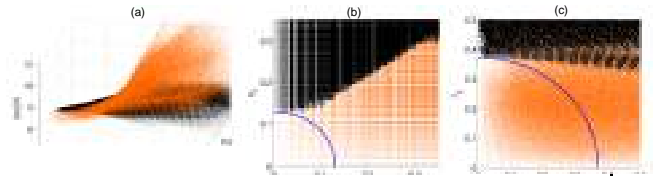
## Les limites de validité

- Forme normale : théorie locale. Limite de validité en terme d'amplitude.
- Développement d'un critère de validité pour les formes normales

[C.-H. Lamarque, C. Touzé and O. Thomas : An upper bound for validity limits of asymptotic analytical approaches based on normal form theory, *Nonlinear Dynamics*, vol. 70(3), 1931-1949, 2012.]

- Idée de fond : dans les équations homologiques, apparition de l'opérateur  $\mathbf{I} + \partial\Phi(\mathbf{u})$ , où  $\mathbf{u}$  est la variable normale ( $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u})$ ) que l'on "cherche" à inverser.

↪ les zéros de  $\mathbf{I} + \partial\Phi(\mathbf{u})$  marquent la limite de validité.

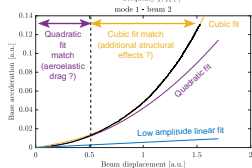
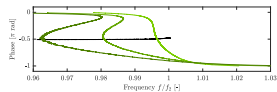
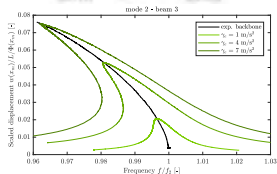
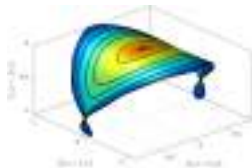


- Autres critères :
  - méthode de paramétrisation : erreur d'invariance. [A. Haro *et al.*, Springer, 2016]
  - critères de Cauchy et d'Alembert sur les développements en série. [A. Grolet, A. Vizzaccaro, M. Debeurre, O. Thomas, *Nonlinear Dynamics*, *submitted*.]



## New trends in nonlinear modes

- ▷ Numerical computation & reduction tool
  - ↪ tends to be mature, with FE problems



## New trends in nonlinear modes

▷ **Numerical computation & reduction tool**

↪ tends to be mature, with FE problems

▷ **Experimental testing**

Some recent results linked to NNMs & normal form

$$M(\mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_d(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_e$$

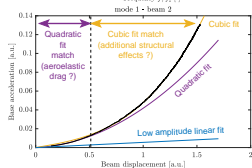
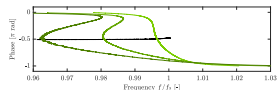
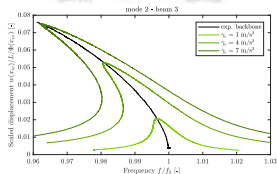
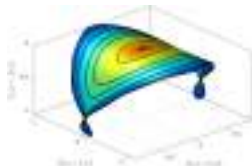
- Separation of conservative and dissipative forces + arbitrary **damping**

↪ odd / even dependence in  $\dot{\mathbf{u}}$

↪ onto a CNM motion, there is a **phase lag** of  $\pi/2$

between each harmonic of  $\mathbf{f}_e$  and  $\mathbf{u}$

⇒ **robust measurement of CNM + damping law estimation** with phase resonance continuation



## New trends in nonlinear modes

### ► Numerical computation & reduction tool

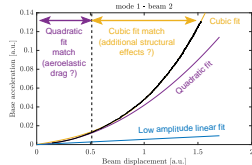
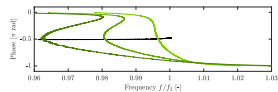
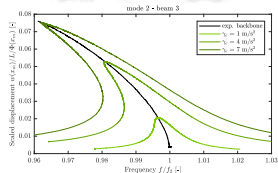
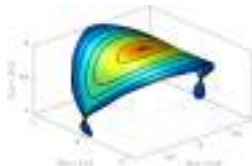
↪ tends to be mature, with FE problems

### ► Experimental testing

Some recent results linked to NNMs & normal form

$$M(\mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_d(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_e$$

- Separation of conservative and dissipative forces + arbitrary **damping**
  - ↪ odd / even dependence in  $\dot{\mathbf{u}}$
  - ↪ onto a CNM motion, there is a **phase lag** of  $\pi/2$  between each harmonic of  $\mathbf{f}_e$  and  $\mathbf{u}$
  - ⇒ **robust measurement of CNM + damping law estimation** with phase resonance continuation
- Thanks to the resonant nature of a CNM, it works even if  $\mathbf{f}_e$  is not the exact mirror of  $\mathbf{f}_d$  (not a perfect appropriation)



## New trends in nonlinear modes

### ► Numerical computation & reduction tool

↪ tends to be mature, with FE problems

### ► Experimental testing

Some recent results linked to NNMs & normal form

$$M(\mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_d(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_e$$

- Separation of conservative and dissipative forces + arbitrary **damping**

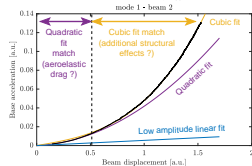
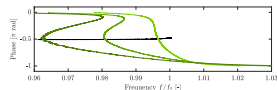
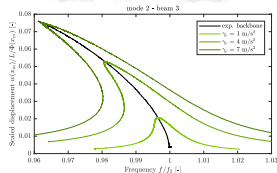
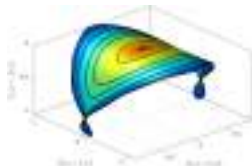
↪ odd / even dependence in  $\dot{\mathbf{u}}$

↪ onto a CNM motion, there is a **phase lag** of  $\pi/2$

between each harmonic of  $\mathbf{f}_e$  and  $\mathbf{u}$

⇒ **robust measurement of CNM + damping law estimation** with phase resonance continuation

- Thanks to the resonant nature of a CNM, it works even if  $\mathbf{f}_e$  is not the exact mirror of  $\mathbf{f}_d$  (not a perfect appropriation)
- Some theoretical work needs to be done in the case of **dry friction**



## New trends in nonlinear modes

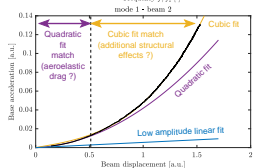
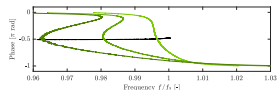
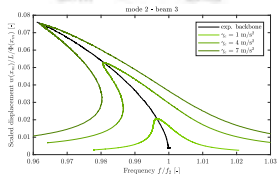
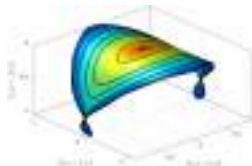
- ▷ **Numerical computation & reduction tool**  
 ↳ tends to be mature, with FE problems

- ▷ **Experimental testing**

Some recent results linked to NNMs & normal form

$$M(\mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_d(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_e$$

- Separation of conservative and dissipative forces + arbitrary **damping**  
 ↳ odd / even dependence in  $\dot{\mathbf{u}}$   
 ↳ onto a CNM motion, there is a **phase lag** of  $\pi/2$  between each harmonic of  $\mathbf{f}_e$  and  $\mathbf{u}$   
 ⇒ **robust measurement of CNM + damping law estimation** with phase resonance continuation
- Thanks to the resonant nature of a CNM, it works even if  $\mathbf{f}_e$  is not the exact mirror of  $\mathbf{f}_d$  (not a perfect appropriation)
- Some theoretical work needs to be done in the case of **dry friction**
- Internal, sub- & super-harmonic resonances, isolas...



## Conclusions

- Forme normale : élément clé et fondamental en dynamique non linéaire.
- Outil d'analyse et de compréhension
- lien évident avec la réduction de modèles et les modes non linéaires

## Conclusions

- Forme normale : élément clé et fondamental en dynamique non linéaire.
- Outil d'analyse et de compréhension
- lien évident avec la réduction de modèles et les modes non linéaires

Questions pour Claude :

- Pourquoi un seul article sur le sujet ?
- Ton point de vue sur cette brève histoire des modes non linéaires ?