Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur le VA-NES (sans jamais oser le demander)

P.-O. Mattei, CNRS-LMA

Collègues
S. Bellizzi, B. Cochelin, R. Côte, Ph. Herzog,
S. Missoum, M. Pachebat, C. Pinhède, L. Sabatier, Ch. Vergez
Étudiant(e)s, Post-docs
W. Allen, R. Bellet, B. Bergeot, I. Bouzid, P.-Y. Bryk,
A. Chauvin, V. Iurasov, E. Gourc, R. Mariani,
M. Monteil, J. Shao, R. Ponçot
Industriels
Saint-Gobain, Peugeot, SATT-SE,
Boët-Stopson, DGA,Total-Energie

17 octobre 2024

Fait : Dans le domaine des basses fréquences, il existe peu de moyens de dissiper *passivement* les champs vibratoires..

Fait : Dans le domaine des basses fréquences, il existe peu de moyens de dissiper *passivement* les champs vibratoires..

Besoin : extraire *efficacement* l'énergie d'une structure vibrante/d'un champ acoustique.

Fait : Dans le domaine des basses fréquences, il existe peu de moyens de dissiper *passivement* les champs vibratoires..

Besoin : extraire *efficacement* l'énergie d'une structure vibrante/d'un champ acoustique.

Absorbeur vibroacoustique dynamique non linéaire passif (aka VA-NES)

Fait : Dans le domaine des basses fréquences, il existe peu de moyens de dissiper *passivement* les champs vibratoires..

Besoin : extraire *efficacement* l'énergie d'une structure vibrante/d'un champ acoustique.

Absorbeur vibroacoustique dynamique non linéaire passif (aka VA-NES)

Principe sous-jacent : transfert irréversible d'énergie et localisation sur un mode non linéaire

Un peu d'histoire

- principe proposé par Vakakis et Gendelman en 2001 pour les systèmes vibrants couplés à un absorbeur cubique sous le nom de transfert irréversible d'énergie

Un peu d'histoire

- principe proposé par Vakakis et Gendelman en 2001 pour les systèmes vibrants couplés à un absorbeur cubique sous le nom de transfert irréversible d'énergie
- étendu à divers types de non linéarités : polynomiales impaires, non-linéarités non régulières, bi-stable et chaotiques (irréversibilité du transfert non assurée...) par Claude-Henri et Emmanuel en 2004

Un peu d'histoire

- principe proposé par Vakakis et Gendelman en 2001 pour les systèmes vibrants couplés à un absorbeur cubique sous le nom de transfert irréversible d'énergie
- étendu à divers types de non linéarités : polynomiales impaires, non-linéarités non régulières, bi-stable et chaotiques (irréversibilité du transfert non assurée...) par Claude-Henri et Emmanuel en 2004
- adapté à l'Acoustique et à la Vibroacoustique par B. Cochelin, Ph. Herzog et votre serviteur en 2006

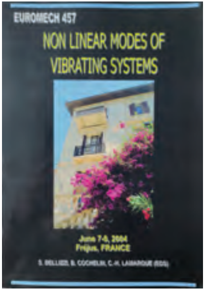
Un peu d'histoire

- principe proposé par Vakakis et Gendelman en 2001 pour les systèmes vibrants couplés à un absorbeur cubique sous le nom de transfert irréversible d'énergie
- étendu à divers types de non linéarités : polynomiales impaires, non-linéarités non régulières, bi-stable et chaotiques (irréversibilité du transfert non assurée...) par Claude-Henri et Emmanuel en 2004
- adapté à l'Acoustique et à la Vibroacoustique par B. Cochelin, Ph. Herzog et votre serviteur en 2006
- bien évidemment à cause de Claude-Henri !

Un peu d'histoire

- principe proposé par Vakakis et Gendelman en 2001 pour les systèmes vibrants couplés à un absorbeur cubique sous le nom de transfert irréversible d'énergie
- étendu à divers types de non linéarités : polynomiales impaires, non-linéarités non régulières, bi-stable et chaotiques (irréversibilité du transfert non assurée...) par Claude-Henri et Emmanuel en 2004
- adapté à l'Acoustique et à la Vibroacoustique par B. Cochelin, Ph. Herzog et votre serviteur en 2006
- bien évidemment à cause de Claude-Henri !

En juin 2004, se tient à Fréjus le colloque Euromech 457 :
Non linear modes of vibrating systems, organisé par Claude-Henri Lamarque, Bruno Cochelin et Sergio Bellizzi au cours duquel Alexander Vakakis parle de "Nonlinear Normal Modes and Energy Pumping"...



Un peu d'histoire

Une vingtaine d'articles de Claude-Henri sur le sujet

Une simple recherche (NES) sur Google Scholar donne (nombres à utiliser avec prudence)

- 2000 $\Rightarrow$ 2002 : 22 articles
- 2002 $\Rightarrow$ 2010 : 2632 articles
- 2010 $\Rightarrow$ 2020 : 2070 articles
- 2020 $\Rightarrow$ 2024 : 3250 articles

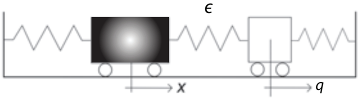
152 articles de revue (en 2024)

Un sujet de recherche actif et qui commence à irriguer l'industrie : Tacita Dynamics.

Au LMA, nous avons 4 (ou 5) brevets CNRS/Industrie

Une expérience numérique introductive

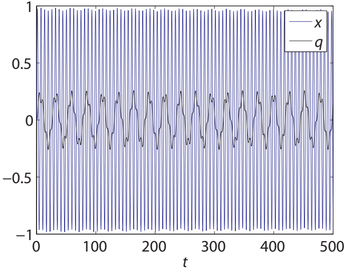
Deux oscillateurs linéaires, non amortis et faiblement couplés



$$\ddot{x} + {\omega_1}^2 \; x + \varepsilon(x - q) = 0$$
$$\ddot{q} + {\omega_2}^2 \; q + \varepsilon(q - x) = 0$$

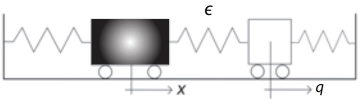
avec $\varepsilon = 0.05$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.1$

conditions initiales
$\dot{x}(0) = 1, \;\; \dot{q}(0) = 0, \;\; x(0) = q(0) = 0$



$\Rightarrow$ **Pas d'échange d'énergie**

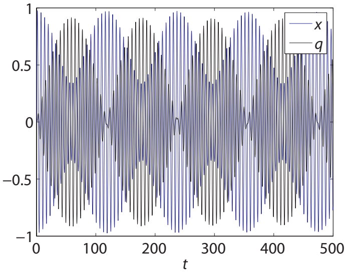
Deux oscillateurs linéaires accordés, non amortis et faiblement couplés



$$\ddot{x} + {\omega_1}^2\ x + \varepsilon(x - q) = 0$$
$$\ddot{q} + {\omega_2}^2\ q + \varepsilon(q - x) = 0$$

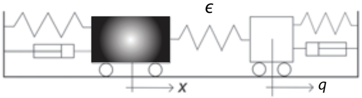
avec $\varepsilon = 0.05\ ,\ \omega_1 = 1\ ,\ \omega_2 = 0.98$

conditions initiales
$\dot{x}(0) = 1,\ \dot{q}(0) = 0,\ x(0) = q(0) = 0$



$\Rightarrow$ **Fort échange d'énergie par battements linéaires ; dans les deux directions**

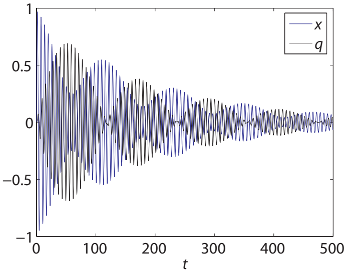
Deux oscillateurs linéaires accordés, amortis et faiblement couplés



$$\ddot{x} + \lambda_1 \ \dot{x} + {\omega_1}^2 \ x + \varepsilon(x - q) = 0$$
$$\ddot{q} + \lambda_2 \ \dot{q} + {\omega_2}^2 \ q + \varepsilon(q - x) = 0$$

avec $\varepsilon = 0.05 \ , \ \omega_1 = 1 \ , \ \omega_2 = 0.98$
$\lambda_1 = 0.01 \ , \ \lambda_2 = 0.01$

conditions initiales
$\dot{x}(0) = 1, \ \dot{q}(0) = 0, \ x(0) = q(0) = 0$



$\Rightarrow$ **Échanges d'énergie importants par battements linéaires amortis ; dans les deux directions**

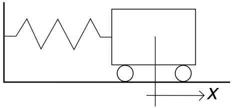
Une expérience numérique introductive

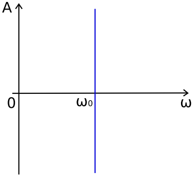
- Une résonance est nécessaire pour assurer un échange d'énergie. Mais comment empêcher son retour ?

  $\Rightarrow$ En cassant la résonance.

Une expérience numérique introductive

- Une résonance est nécessaire pour assurer un échange d'énergie. Mais comment empêcher son retour ?
  $\Rightarrow$ En cassant la résonance.
- Dans le cas linéaire, la fréquence ne dépend pas de l'amplitude et l'amortissement n'aide pas.

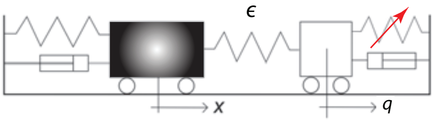


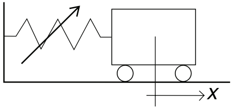


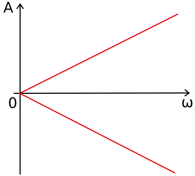
Une expérience numérique introductive

- Une résonance est nécessaire pour assurer un échange d'énergie. Mais comment empêcher son retour ?

  $\Rightarrow$ En cassant la résonance.
- Dans le cas linéaire, la fréquence ne dépend pas de l'amplitude et l'amortissement n'aide pas.
- L'idée est donc d'utiliser une forte nonlinéarité :

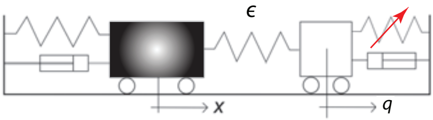




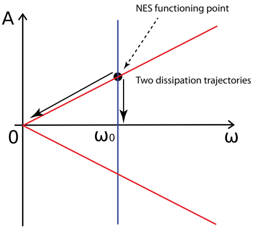


Une expérience numérique introductive

- Une résonance est nécessaire pour assurer un échange d'énergie. Mais comment empêcher son retour ?
  $\Rightarrow$ En cassant la résonance.
- Dans le cas linéaire, la fréquence ne dépend pas de l'amplitude et l'amortissement n'aide pas.
- L'idée est donc d'utiliser une forte nonlinéarité :

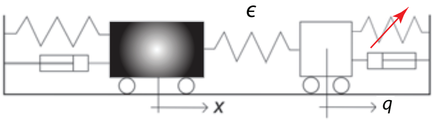


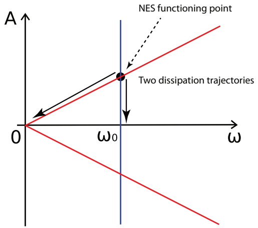
- A partir d'une certaine énergie, il peut y avoir une résonance et un transfert d'énergie.



Une expérience numérique introductive

- Une résonance est nécessaire pour assurer un échange d'énergie. Mais comment empêcher son retour ?
  $\Rightarrow$ En cassant la résonance.
- Dans le cas linéaire, la fréquence ne dépend pas de l'amplitude et l'amortissement n'aide pas.
- L'idée est donc d'utiliser une forte nonlinéarité :

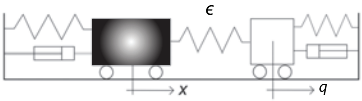


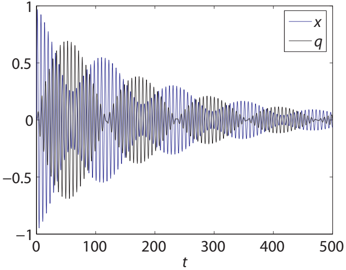


- A partir d'une certaine énergie, il peut y avoir une résonance et un transfert d'énergie.
- Grâce à l'amortissement, l'amplitude baisse donc la fréquence aussi et la résonance est cassée : pas de retour de l'énergie.

Le système linéaire initial

Deux oscillateurs linéaires accordés et amortis faiblement couplés





$$\ddot{x} + \lambda_1 \; \dot{x} + {\omega_1}^2 \; x + \varepsilon(x - q) = 0$$
$$\ddot{q} + \lambda_2 \; \dot{q} + {\omega_2}^2 \; q + \varepsilon(q - x) = 0$$

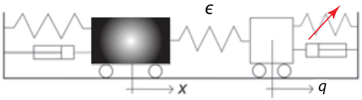
avec $\varepsilon = 0.05 \; , \; \omega_1 = 1 \; , \; \omega_2 = 0.98$
$\lambda_1 = 0.01 \; , \; \lambda_2 = 0.01$

conditions initiales
$\dot{x}(0) = 1, \; \dot{q}(0) = 0, \; x(0) = q(0) = 0$

$\Rightarrow$ **Échanges d'énergie importants par battements linéaires amortis ; dans les deux directions**

Le système non linéaire développé

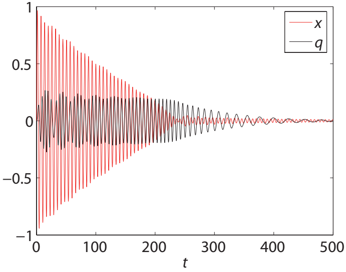
Oscillateur linéaire faiblement couplé à un oscillateur de rigidité **cubique**.



$$\ddot{x} + \lambda_1 \ \dot{x} + {\omega_1}^2 \ x + \varepsilon(x - q) = 0$$
$$\ddot{y} + \lambda_2 \ \dot{q} + \alpha \ q^3 + \varepsilon(q - x) = 0$$

avec $\varepsilon = 0.05$, $\omega_1 = 1$, $\alpha = 36$
$\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.03$

conditions initiales
$\dot{x}(0) = 1, \ \dot{q}(0) = 0, \ x(0) = q(0) = 0$



$\Rightarrow$ **Un transfert d'énergie unidirectionnel très efficace**

Organisation de la présentation

1. Pompage énergétique en acoustique
   - Couplage entre un milieu acoustique et une membrane
   - Pompage d'énergie : principales observations expérimentales
   - Étude paramétrique
   - Plusieurs membranes en parallèle
   - Un peu d'analytique
2. La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces
   - Membrane bi-stable
   - Et l'amortissement dans tout cela ?
3. Comportements non usuels de membranes en grande déformation
   - Plusieurs backbones curves ?
   - Qui veut du streaming ?
4. Quelques commentaires en forme de conclusion

Le pompage énergétique en acoustique

Couplage entre un milieu acoustique et une membrane

Une membrane en tant qu'oscillateur non linéaire à rigidité cubique

Dans un gaz, il est difficile de réaliser une non-linéarité impaire...

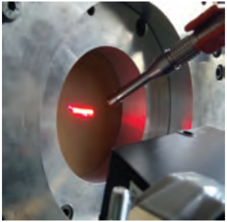
Utiliser un oscillateur mécanique soumis à un mouvement transversal de grande amplitude : une membrane souple (par exemple en latex) peut se décrire comme un oscillateur avec une rigidité cubique.

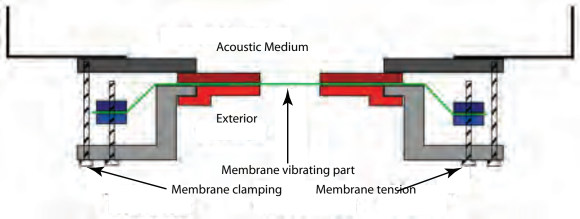
Une membrane en tant qu'oscillateur non linéaire à rigidité cubique

Dans un gaz, il est difficile de réaliser une non-linéarité impaire...

Utiliser un oscillateur mécanique soumis à un mouvement transversal de grande amplitude : une membrane souple (par exemple en latex) peut se décrire comme un oscillateur avec une rigidité cubique.

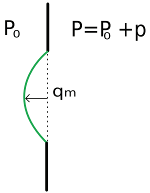
Réalisation





Une membrane en tant qu'oscillateur non linéaire à rigidité cubique

Modèle à 1ddl pour la membrane



Pour une membrane soumise à un déplacement axisymétrique parabolique

$$q(r,\theta,t) = \left(1-(r/R)^2\right) q_m(t)$$

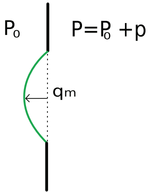
Une réduction de Ritz donne une équation de Duffing NL

$$m_m \ddot{q}_m(t) + k_1 \left(x + \eta\, \dot{q}_m(t)\right) + k_3 \left(q_m^3(t) + 2\eta\, q_m^2 \dot{q}_m\right) = p(t)$$

- m_m: masse dynamique
- $p(t)$: forçage
- k_1, k_3: raideurs dynamiques linéaires et cubiques
- $k_1\eta, k_3\eta$: amortissements visqueux linéaire et non-linéaire

Une membrane en tant qu'oscillateur non linéaire à rigidité cubique

Modèle à 1ddl pour la membrane



Pour une membrane soumise à un déplacement axisymétrique parabolique

$$q(r,\theta,t) = \left(1-(r/R)^2\right) q_m(t)$$

Une réduction de Ritz donne une équation de Duffing NL

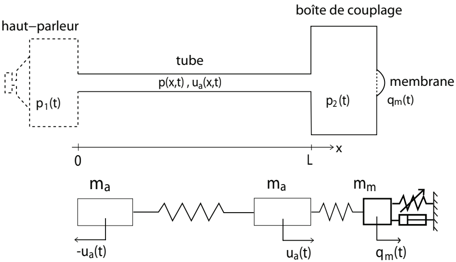
$$m_m \ddot{q}_m(t) + k_1\left(x + \eta\,\dot{q}_m(t)\right) + k_3\left(q_m^3(t) + 2\eta\, q_m^2 \dot{q}_m\right) = p(t)$$

- m_m: masse dynamique
- $p(t)$: forçage
- k_1, k_3: raideurs dynamiques linéaires et cubiques
- $k_1\eta, k_3\eta$: amortissements visqueux linéaire et non-linéaire

D'autres choix de déformée sont possibles (eg $J_0(\kappa_0 r/R)$)...

Couplage entre un milieu acoustique et une membrane

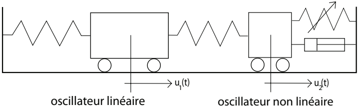
Application du pompage d'énergie à l'acoustique



- Système à contrôler : pression acoustique à l'intérieur d'un tuyau (mode fondamental)
- NES : fine membrane circulaire viscoélastique
- Faible rigidité de couplage : volume d'air à l'intérieur de la boîte de couplage

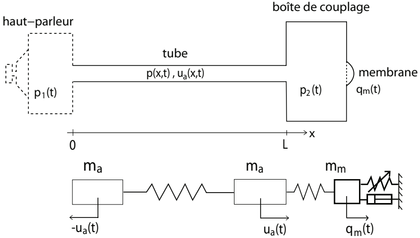
Modèle à 2-ddl

Système mécanique classique



$$\ddot{u}_1 + \lambda \dot{u}_1 + u_1 + \beta(u_1 - u_2) = 0$$
$$\gamma \ddot{u}_2 + c_\eta \dot{u}_2 + k_3 u_2^3 + \beta(u_2 - u_1) = 0$$

dispositif acoustique



$$\ddot{u}_a + \lambda \ \dot{u}_a + u_a + \beta(u_a - q_m) = 0$$
$$\gamma \ddot{q}_m + k_1 \eta \dot{q}_m + k_1 q_m + k_3 q_m^3 + 2k_3 \eta q_m^2 \dot{q}_m + \beta(q_m - u_a) = 0$$

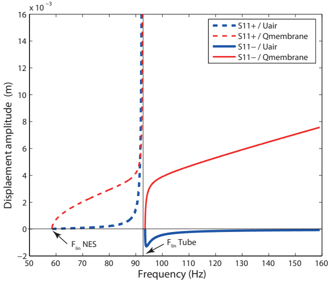
Modèles similaires à deux différences près :

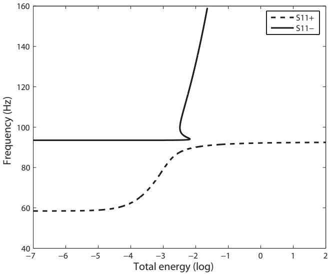
- la rigidité linéaire due à la tension de la membrane
- terme d'amortissement non linéaire

Modèle à 2-ddl

Les deux premiers modes non linéaires $S11\pm$ sont obtenus par équilibrage harmonique du modèle 2-ddl sans amortissement à une composante $u_a(t) = U(\omega)\cos\omega t$, $q_m(t) = Q(\omega)\cos\omega t$:

- $S11+$: l'air et la membrane vibrent en phase à la même fréquence
- $S11-$: l'air et la membrane vibrent en opposition de phase à la même fréquence





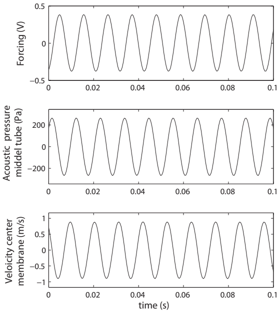
Pompage d'énergie : principales observations expérimentales

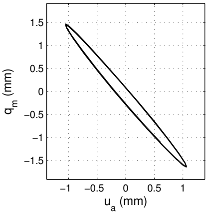
Oscillations forcées - résultats expérimentaux

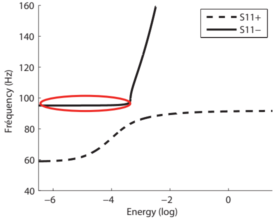
configuration : $h = 0{,}18$ mm, $R = 3$ cm, $f_{\mathbf{1}} = 61$ Hz

Faible forçage ($\mathcal{A}$ =0.4 V)

- Régime périodique
- Oscillateurs déphasés
- Trajectoire localisée sur le mode non linéaire $S11-$.





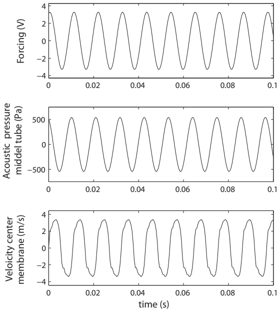


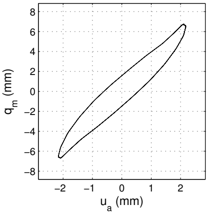
Oscillations forcées - résultats expérimentaux

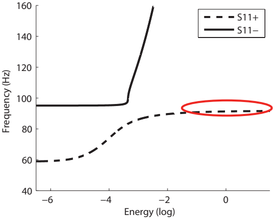
configuration : $h = 0,18$ mm, $R = 3$ cm, $f_1 = 61$ Hz

Forçage de grande amplitude ($\mathcal{A}$ =3.4 V)

- Régime périodique
- Oscillateurs en phase
- Trajectoire localisée sur le mode non linéaire $S11+$.





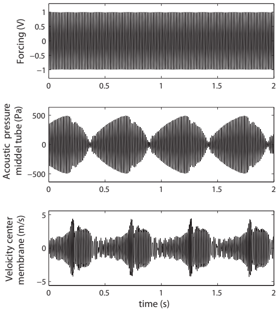


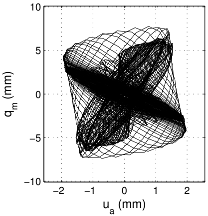
Oscillations forcées - résultats expérimentaux

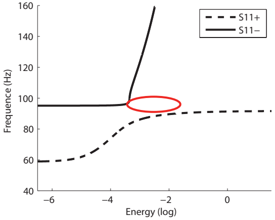
configuration : $h = 0,18$ mm, $R = 3$ cm, $f_1 = 61$ Hz

Forçage intermédiaire ($\mathcal{A} = 1$ V)

- Régime quasi-périodique ou régime fortement modulé (Strongly Modulated Response/SMR)
- Situations alternées d'oscillateurs en phase et en opposition de phase
- Correspond à la zone "vide" entre les deux modes non linéaires.

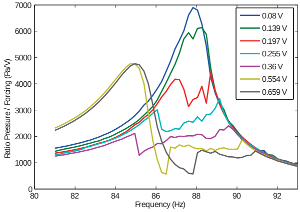


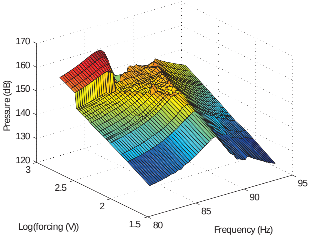


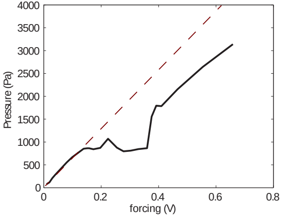


Réponses en fréquence - résultats expérimentaux

configuration : $h = 0{,}18$ **mm,** $R = 4$ **cm,** $f_1 = 45$ **Hz**







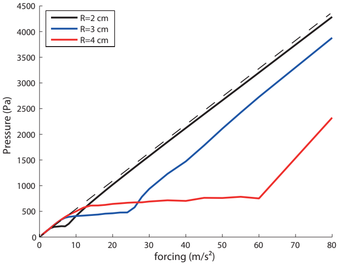
- "**Plateau**" dans la courbe de crête où seuls des SMR existent.
- Le SMR gouverne/indique le pompage énergétique
- Pompage énergétique : limitation du niveau de pression acoustique

Étude paramétrique

Étude paramétrique

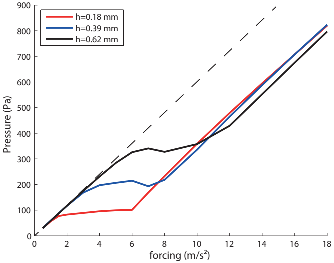
Possibilité de régler la membrane

Rayon variable de la membrane :



$h = 0,39$ mm, $f_1 = 30$ Hz, $R = 2/3/4$ cm

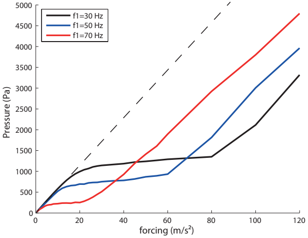
Épaisseur variable de la membrane :



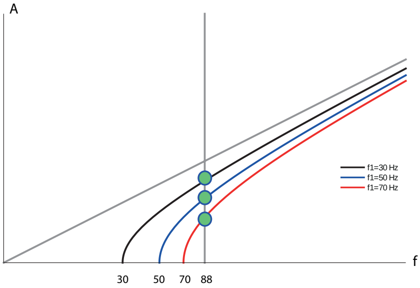
$R = 2$ cm, $f_1 = 30$ Hz, $h = 0,18/0,39/0,62$ mm

Étude paramétrique

Tension variable de la membrane :



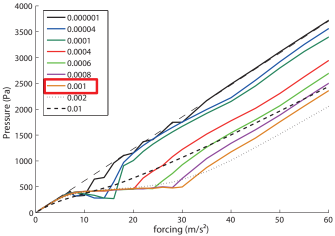
$R = 4$ cm, $h = 0{,}62$ mm, $f_1 = 30/50/70$ Hz



La tension de la membrane règle le seuil d'activation

Étude paramétrique

Amortissement variable de la membrane (calculé) :

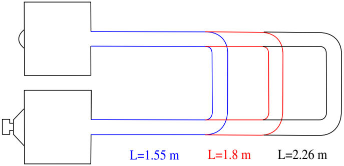


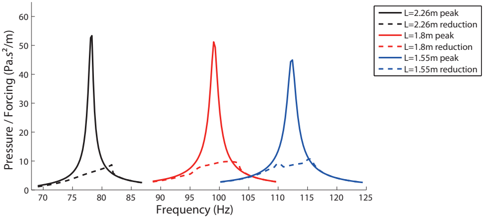
$R = 3$ cm, $h = 0{,}62$ mm, $f_1 = 30$ Hz, $\eta = 0{,}000001/.../0{,}01$ s^{-1}

Étude paramétrique

Le NES fonctionne sur une large gamme de fréquences

Longueur de tube variable (changement de mode de fréquence) :





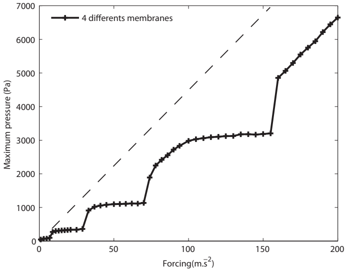
$R = 4$ cm, $h = 0{,}18$ mm, $f_{\mathbf{1}} = 30$ Hz

Plusieurs membranes en parallèle

Plusieurs membranes en parallèle

Membranes identiques ou différentes ?

Courbes de crête simulées :



4 membranes

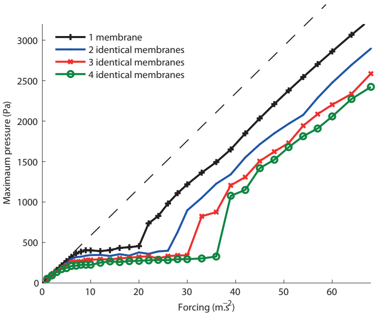
M 1 :	$R = 2{,}0$ cm, $h = 0{,}20$ mm, $f_1 = 50$ Hz
M 2 :	$R = 3{,}0$ cm, $h = 0{,}30$ mm, $f_1 = 40$ Hz
M 3 :	$R = 4{,}0$ cm, $h = 0{,}40$ mm, $f_1 = 30$ Hz
M 4 :	$R = 5{,}0$ cm, $h = 0{,}50$ mm, $f_1 = 20$ Hz

Un plateau pour chaque membrane

Plusieurs membranes en parallèle

Membranes identiques ou différentes ?

Courbes de crête simulées :



4 membranes

M 1 :	$R = 3{,}0$ cm, $h = 0{,}30$ mm, $f_1 = 40$ Hz
M 2 :	$R = 3{,}1$ cm, $h = 0{,}31$ mm, $f_1 = 40$ Hz
M 3 :	$R = 3{,}2$ cm, $h = 0{,}32$ mm, $f_1 = 40$ Hz
M 4 :	$R = 3{,}3$ cm, $h = 0{,}33$ mm, $f_1 = 40$ Hz

Plus il y a de membranes, plus le plateau est large.
Confirmé expérimentalement avec 2 membranes

Un peu d'analytique (en hommage à Claude-Henri)

Un peu d'analytique (en hommage à Claude-Henri)

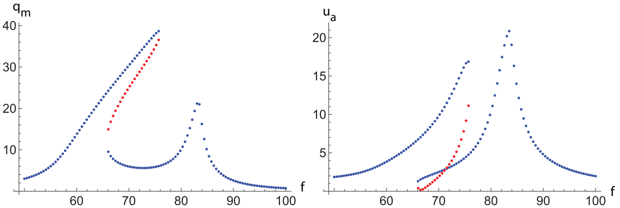
Points fixes/Régime périodique
Pour notre système à 2-ddl, les points fixes sont obtenus par Cx-A de Manevitch ($\phi_1 e^{i\tau\omega} = u'_a + \imath u_a \omega$, $\phi_2 e^{i\tau\omega} = q'_m + \imath q_m \omega$) et sont tels que $\dot{\phi}_i = \dot{\phi}_{i0} = 0$:

$$\alpha_3 Z_{20}^3 + \alpha_2 Z_{20}^2 + \alpha_1 Z_{20} + \alpha_0 = 0, Z_{20} = |\phi_{20}|^2, \phi_{10} = C\phi_{20}$$

où les $\alpha_i, i = 0 \cdots 3$ sont réels et dépendent des paramètres du système tout comme C. Les points fixes sont les racines de ce polynôme (il en possède 1 ou 3). La stabilité de ces points fixes se fait par une analyse de perturbation linéaire et conduit à l'étude des racines d'un polynôme de degré 4 en x :

$$x^4 + \gamma_3 x^3 + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 = 0$$

où les $\gamma_i, i = 0 \cdots 3$ dépendent de Z_{20} et des paramètres du système. Si $\Re(x_i) > 0$, le point fixe est instable et $\Re(x_i) < 0, \forall i$, le point fixe est stable.



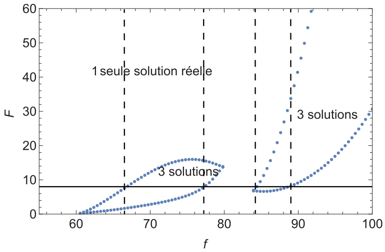
Exemple de points fixes du système. Bleu : stables. Rouge : instables.

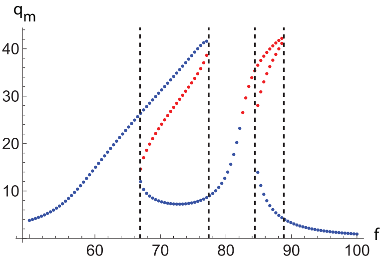
Un peu d'analytique (en hommage à Claude-Henri)

Bifurcation de solutions périodiques : SN

Le passage de 1 à 3 points d'équilibre se caractérise par l'étude de la bifurcation Selle-Nœud (SN). Le nombre de solutions du polynôme dépend du signe de discriminant $\Delta_{SN} = \alpha_1^2\alpha_2^2 - 4\alpha_0\alpha_2^3 - 4\alpha_1^3\alpha_3 + 18\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 27\alpha_0^2\alpha_3^2$.

- Si $\Delta_{SN} < 0$: 1 solution réelle
- Si $\Delta_{SN} > 0$: 3 solutions réelles.
- $\Delta_{SN} = 0$ caractérise la bifurcation SN





Gauche : Bifurcations SN dans le plan (f, F). Droite : $q_m(f)$ pour $F = 8$.

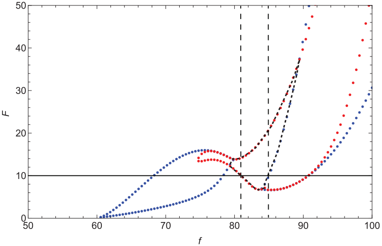
Un peu d'analytique (en hommage à Claude-Henri)

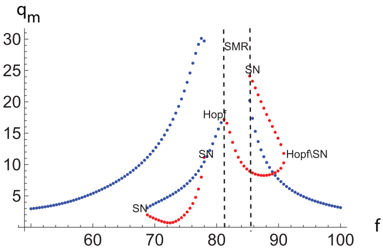
Bifurcation de solutions périodiques : Hopf
La limite zones stables et instables est caractérisée par une bifurcation de Hopf. On repart du polynôme aux valeurs propres

$$x^4 + \gamma_3 x^3 + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 = 0$$

La limite stable/instable est fixée par les valeurs propres $x = \pm\imath X$ imaginaires pures. On obtient la condition de la bifurcation de Hopf

$$\gamma_1^2 + \gamma_0 \gamma_3^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 = 0$$





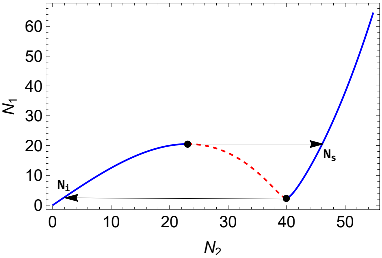
Gauche : Bifurcations d'Hopf (rouge) et SN (bleu) dans le plan (f, F), En noir la zone à une seule solution périodique instable (SMR). Droite : Courbes de résonance du tube pour $F \approx 10$.

Un peu d'analytique (en hommage à Claude-Henri)

Régime fortement modulé/SMR

Le régime SMR caractérise le pompage. Il se caractérise par deux échelles de temps différentes (rapide/lent), la faible masse permet de définir un petit paramètre $\varepsilon = \gamma/m_a$ et d'utiliser une méthode de perturbation en échelles multiples. À l'ordre zéro, on obtient la variété invariante lente (SIM) qui relie les amplitudes de l'absorbeur et du système primaire :

$$\begin{aligned} z_1\beta^2 &= z_2^3\left(\frac{c_{\eta nl}^2}{16}+\frac{9k_{nl}^2}{16}\right)+z_2^2\left(\frac{c_{\eta l}c_{\eta nl}}{2}+\frac{3}{2}k_{nl}(\beta+k_l-1)\right) \\ &\quad +z_2\left(c_{\eta l}^2+(\beta_1+k_l-1)^2\right), z_1=N_1^2, z_2=N_2^2 \end{aligned}$$



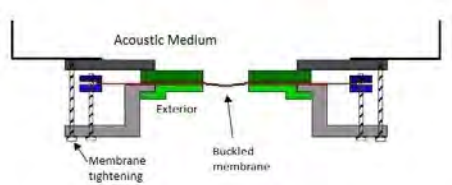
Exemple de SIM

L'étude du temps lent quantifie ces cycles de relaxation, en particulier l'apparition de singularités plis (ou fold) qui conditionnent l'existence du SMR/pompage énergétique.

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

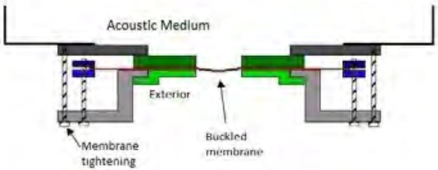
La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

Et si, plutôt que de tendre la membrane, on l'autorise à flamber ?



La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

Et si, plutôt que de tendre la membrane, on l'autorise à flamber ?



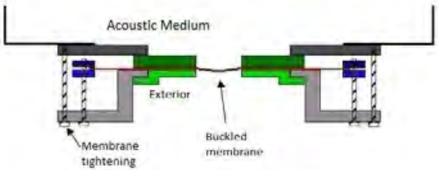
On repart du modèle initial :

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_a + \lambda \dot{u}_a + u_a + \beta(u_a - q_m) &= F \cos\left(\frac{\Omega}{\omega_t}\tau\right) \\
\gamma \ddot{q}_m + k_l q_m + k_{nl} q_m^3 + c_{\eta l} \dot{q}_m + c_{\eta nl} \dot{q}_m q_m^2 + \beta(q_m - u_a) &= 0
\end{aligned}
$$

La membrane possède une position d'équilibre instable $q_e = 0$ et deux stables $q_e = \pm\sqrt{(-\beta - k_l(\beta+1))/(k_{nl}(\beta+1))}$ si on impose $k_l < -\beta/(\beta+1)$.

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

Et si, plutôt que de tendre la membrane, on l'autorise à flamber ?



On repart du modèle initial :

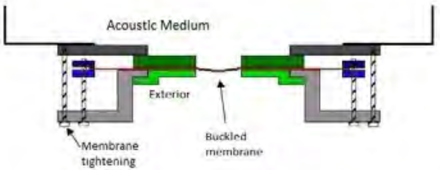
$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_a + \lambda \dot{u}_a + u_a + \beta(u_a - q_m) &= F\cos\left(\frac{\Omega}{\omega_t}\tau\right) \\
\gamma \ddot{q}_m + k_l q_m + k_{nl} q_m^3 + c_{\eta l}\dot{q}_m + c_{\eta nl}\dot{q}_m q_m^2 + \beta(q_m - u_a) &= 0
\end{aligned}
$$

La membrane possède une position d'équilibre instable $q_e = 0$ et deux stables $q_e = \pm\sqrt{(-\beta - k_l(\beta+1))/(k_{nl}(\beta+1))}$ si on impose $k_l < -\beta/(\beta+1)$.

Existe-t-il une gamme de bi-stabilité pour laquelle une membrane bistable est plus efficace qu'une membrane tendue pour contrôler le niveau sonore dans le milieu acoustique ?

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

Et si, plutôt que de tendre la membrane, on l'autorise à flamber ?



On repart du modèle initial :

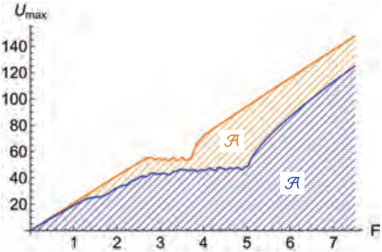
$$\begin{aligned} \ddot{u}_a + \lambda \dot{u}_a + u_a + \beta(u_a - q_m) &= F \cos\left(\frac{\Omega}{\omega_t}\tau\right) \\ \gamma \ddot{q}_m + k_l q_m + k_{nl} q_m^3 + c_{\eta l} \dot{q}_m + c_{\eta nl} \dot{q}_m q_m^2 + \beta(q_m - u_a) &= 0 \end{aligned}$$

La membrane possède une position d'équilibre instable $q_e = 0$ et deux stables $q_e = \pm\sqrt{(-\beta - k_l(\beta+1))/(k_{nl}(\beta+1))}$ si on impose $k_l < -\beta/(\beta+1)$.

Existe-t-il une gamme de bi-stabilité pour laquelle une membrane bistable est plus efficace qu'une membrane tendue pour contrôler le niveau sonore dans le milieu acoustique ?

Comment choisir le critère d'optimalité ?

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

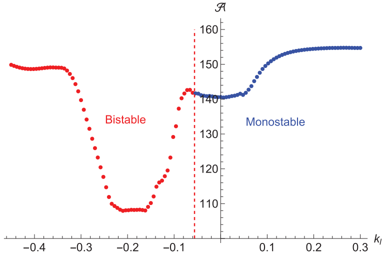


Exemple de lignes de crêtes pour deux valeurs de la raideur linéaire k_l.
$U_{max} = \max(|u_a(f)|)$: déplacement de l'air en bout de tube.

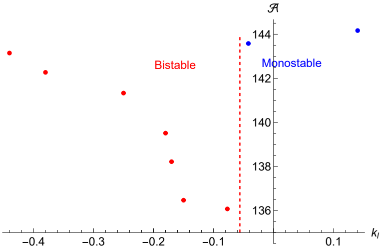
Pour une dynamique de forçage donnée, on minimise l'aire $\mathcal{A}$ sous la ligne de crête...

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

Calcul



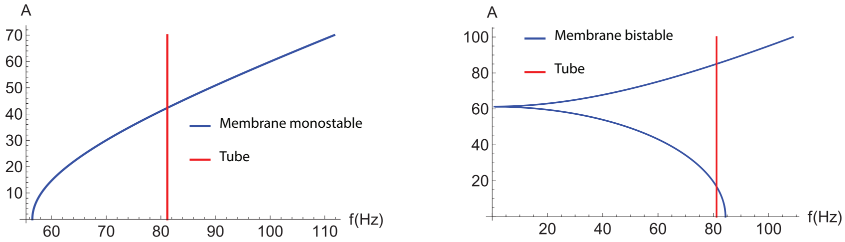
Mesure



Variation de la fonctionnelle $\mathcal{A}$ en fonction de la rigidité linéaire de la membrane ($h_m = 0,22$ mm, $R_m = 5$ cm).

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

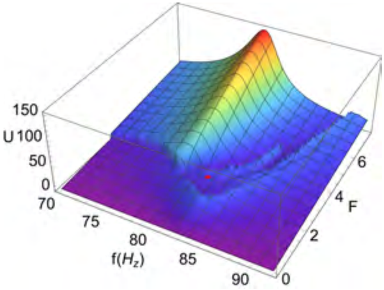
Pourquoi une telle efficacité ?
Superposition de la courbe caractéristique de la membrane monostable (a) et bistable (b) avec celle du tube lorsque la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube.



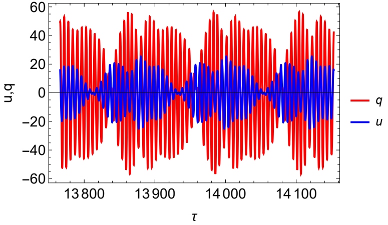
Courbes caractéristiques des membranes monostable et bistable avec celle du tube.

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

Comportement optimal dans la zone monostable ($f_t = 83$ Hz, $k_l = 0{,}024$, $f_m = 54$ Hz)



(a) : $U(f, F)$

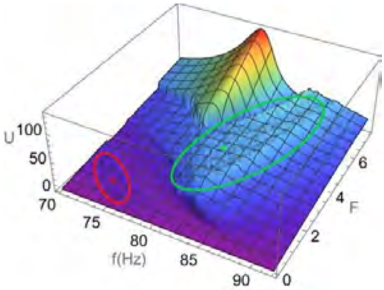


(b) : dynamique du système pour $F = 2{,}34$ et $f = 81{,}9$ Hz

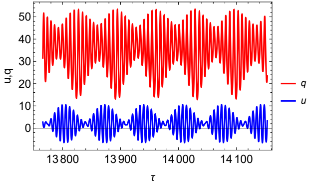
- (a) : réponse du système primaire en fonction de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation
- (b) : réponse temporelle type SMR (point rouge)

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

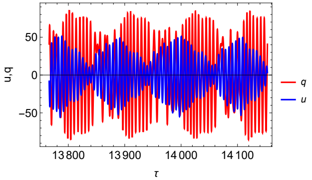
Comportement optimal dans la zone bistable ($f_t = 83$ Hz, $k_l = -0,156, f_m = 91$ Hz)



(a) : $U(f, F)$



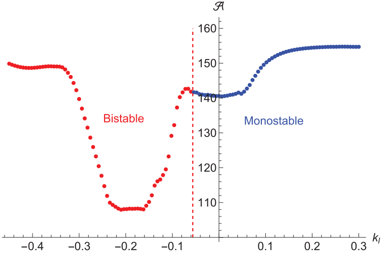
(b) : dynamique du système pour $F = 0,97$ et $f = 73,8$ Hz (intrapuit)

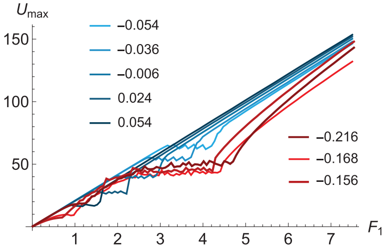


(c) : dynamique du système pour $F = 3,38$ et $f = 81,9$ Hz (interpuits)

- (a) : réponse du système primaire en fonction de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation
- (b) : réponse type SMR du mouvement intrapuit (point rouge)
- (c) : réponse type SMR ou **C-SMR** du mouvement interpuits (point vert)

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces





Superposition de courbes de crête de membranes appartenant aux plateaux minimum bistable (rouge) et minimum monostable (bleu).

- la réduction du niveau sonore est comparable pour toutes les membranes monostables comme bistables, seuls changent les niveaux d'activation et d'extinction.
- pour la membrane bistable, on note deux plateaux pour les lignes de crête à des niveaux différents.
  $\Rightarrow$ paramètre supplémentaire de réglage (aisé à prédire théoriquement : SIM)

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

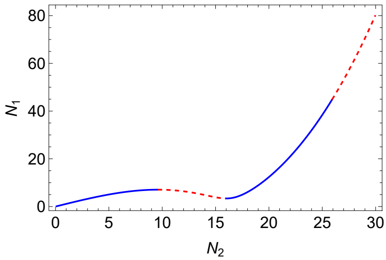
Variété invariante lente (SIM)

$$\begin{aligned}
z_1\beta^2 &= z_2^3\left(\frac{c_{\eta nl}^2}{16}+\frac{9k_{nl}^2}{16}\right)+z_2^2\left(\frac{c_{\eta l}c_{\eta nl}}{2}+\frac{3}{2}k_{nl}(\beta+k_l-1)\right)\\
&+z_2\left(c_{\eta l}^2+(\beta+k_l-1)^2\right)+z_2^2q_0^2\left(\frac{c_{\eta nl}^2}{2}+\frac{9k_{nl}^2}{2}\right)\\
&+z_2q_0^2\left(2c_{\eta l}c_{\eta nl}+6k_{nl}(\beta+k_l-1)\right)+z_2q_0^4\left(c_{\eta nl}^2+9k_{nl}^2\right)\\
q_0 &= \begin{cases}\pm\sqrt{-\frac{\beta+k_l(\beta\gamma+1)}{k_{nl}(\beta\gamma+1)}-\frac{3z_2}{2}}\\ 0\end{cases}
\end{aligned}$$

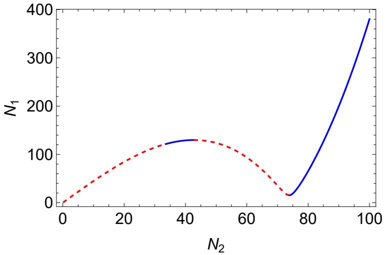
$q_0=0$: solution intrapuit (monostable), $q_0\neq 0$: solutions interpuits,

La multi-stabilité : une voie vers des NESs plus efficaces

SIM intrapuit



SIM interpuits



SIMs des oscillations intrapuit et interpuits pour une membrane bistable ($k_l = -0,168$).

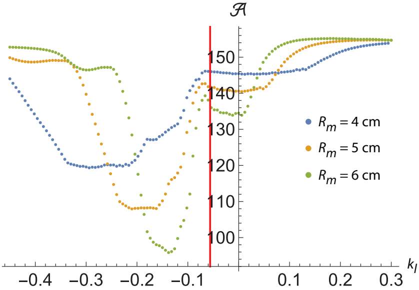
Les deux plateaux de pompages observés correspondent aux mouvements intrapuit et interpuits.

À ceci s'ajoutent des mouvement chaotiques qui dissipent efficacement l'énergie (mais sans irréversibilité du transfert d'énergie) non décrits par les SIMs.

Étude paramétrique

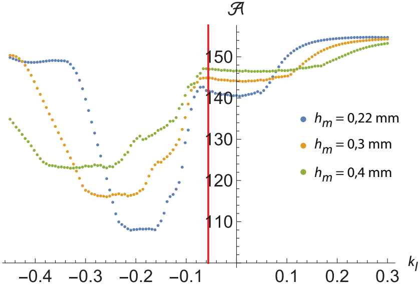
Étude paramétrique

Rayon de la membrane :



$h_m = \mathbf{0,22 \times 10^{-3}}$ **m**

Épaisseur de la membrane :



$R_m = \mathbf{5 * 10^{-2}}$ **m**

Bi-stabilité et monostabilité sont comparables : **efficacité vs latitude de réglage**

Et l'amortissement dans tout cela ?

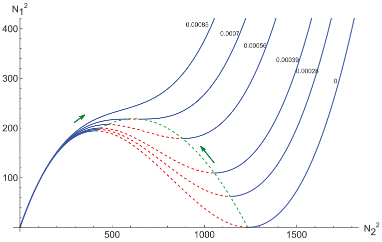
Et l'amortissement dans tout cela ?

Le modèle simplifié de membrane a montré que l'amortissement doit être décrit par deux composantes, linéaire et non-linéaire, qui peuvent soit être traitées par un seul coefficient c_η :

$$\gamma \ddot{q}_m + k_l q_m + k_{nl} q_m^3 + c_\eta (1 + 2\dot{q}_m q_m^2)\dot{q}_m + c_{\eta nl} = F\cos(\omega_t \tau)$$

soit par deux coefficients distincts $c_{\eta l}$ et $c_{\eta nl}$:

$$\gamma \ddot{q}_m + k_l q_m + k_{nl} q_m^3 + c_{\eta l}\dot{q}_m + c_{\eta nl}\dot{q}_m q_m^2 = F\cos(\omega_t \tau)$$



L'évolution de la courbe de la SIM en fonction de l'amortissement non linéaire. Bleu : stable. Rouge : instable. Vert : variation des extrema de la SIM

Et l'amortissement dans tout cela ?

Les premières études menées avaient montré que si les coefficients du modèle simplifié pouvaient être aisément identifiées expérimentalement, **l'amortissement de la membrane ne pouvait pas être décrit par des coefficients indépendants de l'amplitude**

Et l'amortissement dans tout cela ?

Les premières études menées avaient montré que si les coefficients du modèle simplifié pouvaient être aisément identifiées expérimentalement, **l'amortissement de la membrane ne pouvait pas être décrit par des coefficients indépendants de l'amplitude**

Construire un modèle simplifié mais à **paramètres variables**

Et l'amortissement dans tout cela ?

Les premières études menées avaient montré que si les coefficients du modèle simplifié pouvaient être aisément identifiées expérimentalement, **l'amortissement de la membrane ne pouvait pas être décrit par des coefficients indépendants de l'amplitude**

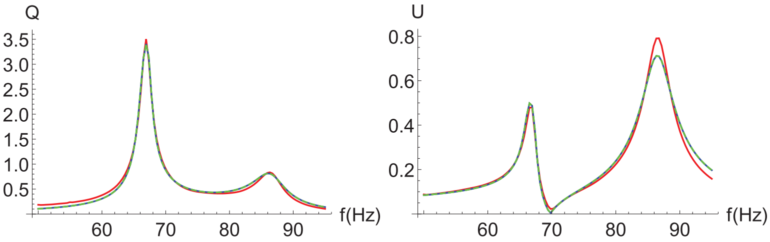
Construire un modèle simplifié mais à **paramètres variables**

En considérant l'amortissement décrit par un seul coefficient c_η, à partir des équations du système à 2 ddl (tube+NES) nous avons construit, par équilibrage harmonique (EH) à une seule harmonique, ou de manière équivalente par Complexification-Averaging (Cx-A)) une fonction algébrique :

$$\begin{aligned} Q^6\alpha_3 + Q^4\alpha_2 + Q^2\alpha_1 &= \beta^2 F^2 \\ Q^6\beta_3 + Q^4\beta_2 + Q^2\beta_1 &= \beta^2 U^2 \end{aligned}$$

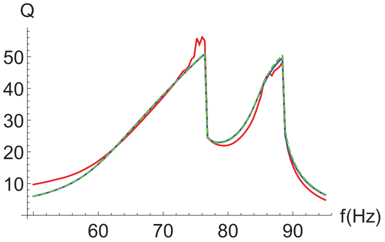
où U et Q sont les amplitudes du déplacement de l'air aux extrémités du milieu acoustique et de la membrane. Les α_i et β_i dépendent des paramètres à identifier (12 heures de calcul sur un serveur à 16 cœurs et 512 go de RAM).

Et l'amortissement dans tout cela ?



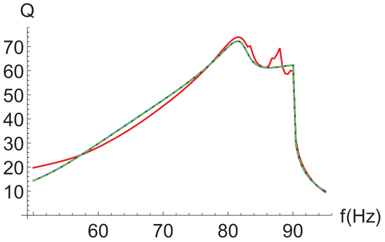
Résultats d'identification (excitation $F = 0,01$ V).
Bleu : EH. Vert : Cx-A. Rouge : expériences.

Et l'amortissement dans tout cela ?



Résultats d'identification (excitation $F = 0,52$ V).
Bleu : EH. Vert : Cx-A. Rouge : expériences.

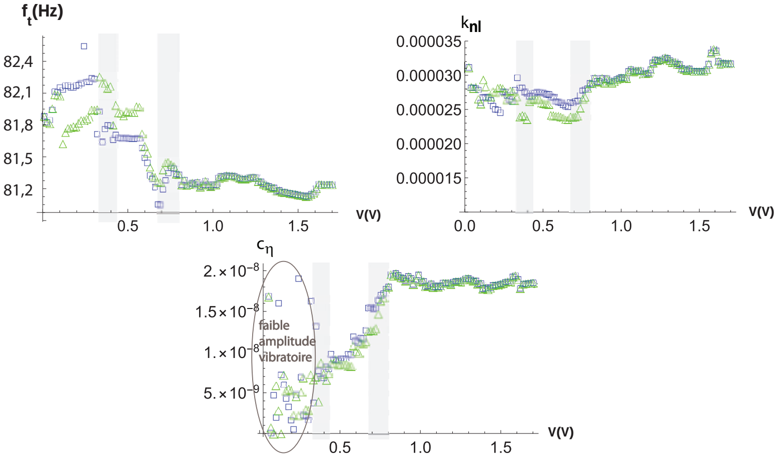
Et l'amortissement dans tout cela ?



Résultats d'identification (excitation $F = 1,12$ V).
Bleu : EH. Vert : Cx-A. Rouge : expériences.

Et l'amortissement dans tout cela ?

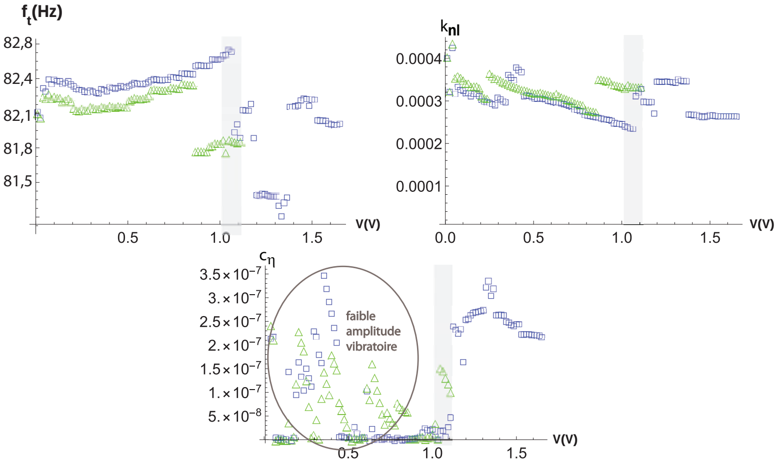
Amortissement augmente très fortement avec l'amplitude de la membrane



Résonance tube, amortissement et raideur NL identifiés (exp 1).
Triangles : Cx-A, carrés : EH

Et l'amortissement dans tout cela ?

Amortissement augmente très fortement avec l'amplitude de la membrane



Résonance tube, amortissement et raideur NL identifiés (exp 3).
Triangles : Cx-A, carrés : EH

L'amortissement augmente très fortement avec l'amplitude vibratoire de la membrane. Et nous ne savons pas pourquoi...

Comportements non usuels de membranes en grande déformation

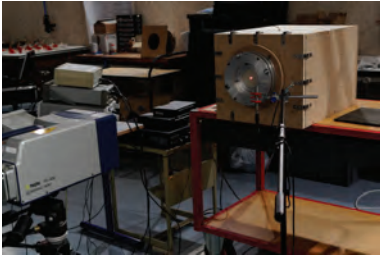
Comportements non usuels de membranes en grande déformation

Origine physique du comportement de membranes en grande déformation ? À moins que ce ne soit un artefact lié au modèle à 1-ddl...

Comportements non usuels de membranes en grande déformation

Origine physique du comportement de membranes en grande déformation ? À moins que ce ne soit un artefact lié au modèle à 1-ddl...

Mesures dédiées plus fines !



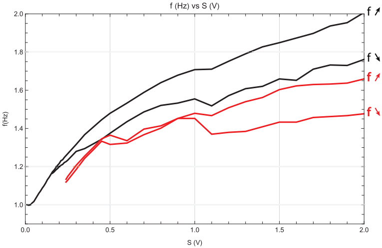
Expériences sur membranes isolées

1/ Forçage en sinus pur, avec balayage en fréquence croissant ou décroissant, identification de la "backbone curve" pour mieux quantifier les non-linéarités (raideur et dissipation).
2/ Identification de la présence ou non d'un écoulement autour de la membrane en grande déformation pour mieux quantifier l'augmentation de l'amortissement observé en grande déformation.

Plusieurs backbones curves ?

Plusieurs backbones curves ?

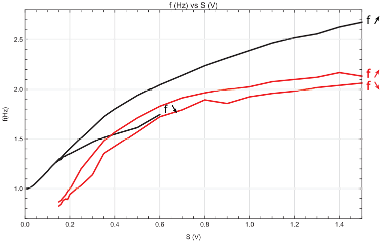
Mesurer la fréquence du maximum de réponse de la membrane à un forçage donné pour des fréquences croissantes et décroissantes



Backbones Curves. Membrane Latex, $R = 8$ cm, $h = 0{,}637$ mm.
Noir : mode A. Rouge : mode B

Plusieurs backbones curves ?

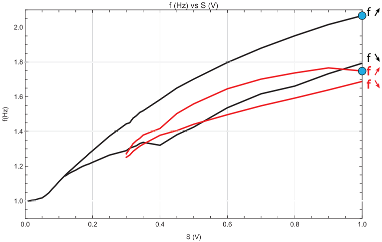
Mesurer la fréquence du maximum de réponse de la membrane à un forçage donné pour des fréquences croissantes et décroissantes



Backbones Curves. Membrane Latex, $R = 8$ cm, $h = 0,410$ mm.
Noir : mode A. Rouge : mode B

Plusieurs backbones curves ?

Mesurer la fréquence du maximum de réponse de la membrane à un forçage donné pour des fréquences croissantes et décroissantes

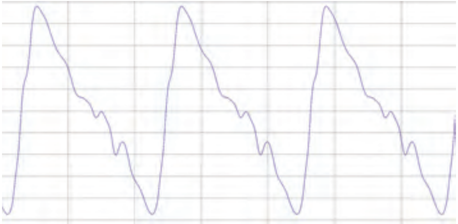


Backbones Curves. Membrane Latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm.
Noir : mode A. Rouge : mode B

La vitesse vibratoire présente clairement deux modes différents de vibration

Plusieurs backbones curves ?

Mode A : membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm à 92 Hz ($2,05 \times f_{lin}$) et 1V



Signal temporel au centre de la membrane.

f_h	92	184	276	368	460	644	736
L (dB)	13,5	8,2	1,1	-4,9	-21,4	-10,1	-13,5

Niveaux du fondamental et des divers harmoniques.

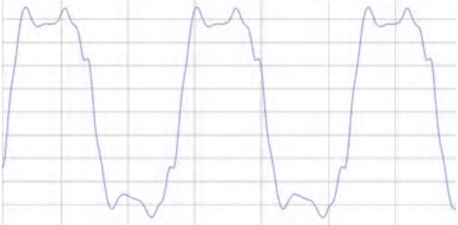
f_1 et $f_2 = 2 \times f_1$ dominent.

Plusieurs backbones curves ?

- Mode A, $f_1 = 92$ Hz
- Mode A, $f_2 = 184$ Hz
- Mode A, $f_3 = 276$ Hz
- Mode A, $f_4 = 368$ Hz
- Mode A, $f_5 = 460$ Hz

Plusieurs backbones curves ?

Mode B : membrane latex, $R = 8$ cm, $h = 0,433$ mm à 78 Hz ($1,8 \times f_{lin}$) et 1V



Signal temporel au centre de la membrane.

f_h	78	156	234	312	390	468	546
L (dB)	10,6	-21,7	-1,7	-32,2	-11,9	-32,1	-17

Niveaux du fondamental et des divers harmoniques.

f_1 et $f_3 = 3 \times f_1$ dominent.

Plusieurs backbones curves ?

- Mode B, $f_1 = 78$ Hz
- Mode B, $f_2 = 156$ Hz
- Mode B, $f_3 = 234$ Hz
- Mode B, $f_4 = 312$ Hz
- Mode B, $f_5 = 390$ Hz

Plusieurs backbones curves ?

Quelques commentaires :

- L'essentiel du mouvement de la membrane est porté par le premier mode symétrique $(1,0)$, comment expliquer la bascule d'un mode à l'autre ?

Plusieurs backbones curves ?

Quelques commentaires :

- L'essentiel du mouvement de la membrane est porté par le premier mode symétrique $(1,0)$, comment expliquer la bascule d'un mode à l'autre ?
- Mode A
  - Piloté par des harmoniques symétriques
  - Fréquence du second mode symétrique $f_{\mathbf{02}} = 2,3 \times f_{\mathbf{10}}$. Résonance $1:2$?
- Mode B
  - Piloté par des harmoniques non-symétriques (épaisseur variable)
  - Fréquence du second mode non-symétrique $f_{\mathbf{2,1}} = 2,14 \times f_{\mathbf{10}}$. Résonance $1:2$?

Plusieurs backbones curves ?

Quelques commentaires :

- L'essentiel du mouvement de la membrane est porté par le premier mode symétrique $(1,0)$, comment expliquer la bascule d'un mode à l'autre ?
- Mode A
  - Piloté par des harmoniques symétriques
  - Fréquence du second mode symétrique $f_{\mathbf{02}} = 2,3 \times f_{\mathbf{10}}$. Résonance $1:2$?
- Mode B
  - Piloté par des harmoniques non-symétriques (épaisseur variable)
  - Fréquence du second mode non-symétrique $f_{\mathbf{2},\mathbf{1}} = 2,14 \times f_{\mathbf{10}}$. Résonance $1:2$?
- Pas de lien évident entre le pompage énergétique et ces modes vibratoires (pourtant certaines membranes "fonctionnent" mieux que d'autres)
- Pas de lien évident non plus avec l'amortissement (le rayonnement acoustique fortement dépendant de la déformée n'est pas considéré)

Qui veut du streaming ?

Qui veut du streaming ?

Une observation expérimentale, littéralement “au doigt mouillé” semble montrer un écoulement au voisinage immédiat de la membrane lorsqu'elle vibre en grande déformation (ie ± 2 cm).

Qui veut du streaming ?

Une observation expérimentale, littéralement “au doigt mouillé” semble montrer un écoulement au voisinage immédiat de la membrane lorsqu’elle vibre en grande déformation (ie ± 2 cm).

Si ceci est avéré, cela pourrait expliquer le supplément considérable d’amortissement observé lorsque la membrane vibre en grande amplitude (la membrane pèse 2 g)

Qui veut du streaming ?

Une observation expérimentale, littéralement “au doigt mouillé” semble montrer un écoulement au voisinage immédiat de la membrane lorsqu'elle vibre en grande déformation (ie ± 2 cm).

Si ceci est avéré, cela pourrait expliquer le supplément considérable d'amortissement observé lorsque la membrane vibre en grande amplitude (la membrane pèse 2 g)

2/ Mesure par PIV Rapide (Dantec Dynamics) de la présence ou non d'un tel écoulement

Qui veut du streaming ?

Une observation expérimentale, littéralement “au doigt mouillé” semble montrer un écoulement au voisinage immédiat de la membrane lorsqu’elle vibre en grande déformation (ie ± 2 cm).

Si ceci est avéré, cela pourrait expliquer le supplément considérable d’amortissement observé lorsque la membrane vibre en grande amplitude (la membrane pèse 2 g)

2/ Mesure par PIV Rapide (Dantec Dynamics) de la présence ou non d’un tel écoulement

Premiers résultats (moins d’un mois...) sur une membrane en latex de 8 cm de diamètre et d’épaisseur 0,433 mm dans un plan perpendiculaire à la membrane.

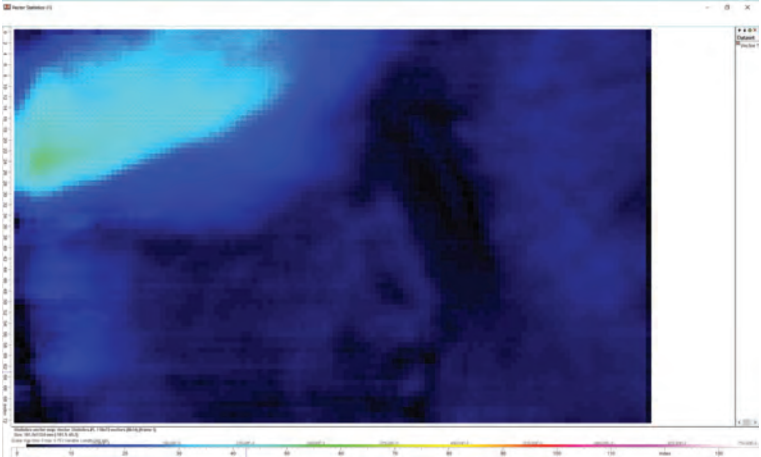
Qui veut du streaming ?

Dispositif de mesure par stéréo-PIV Rapide de la membrane seule.

Après ensemencement du milieu, on mesure 1000 paires d'images (séparées de $1\mu s$) par seconde sur 1 seconde (le champ observé comporte 1 Mpix).
Cinq configurations

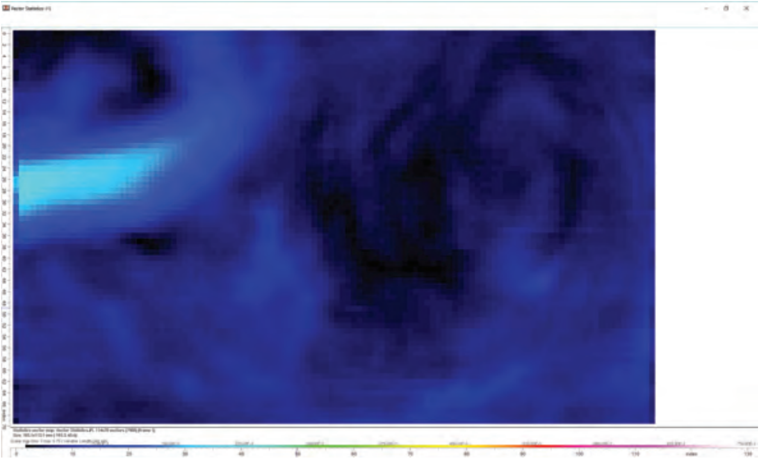
- forçage à 0,3 : mode A à 60 Hz ($V = \pm 2{,}5$ m/s, $U = \pm 6{,}7$ mm)
- forçage à 0,7V : mode B à 70 Hz ($V = \pm 3{,}4$ m/s, $U = \pm 8$ mm) et mode A à 80 Hz ($V = \pm 6{,}6$ m/s, $U = \pm 13$ mm)
- forçage à 1V : mode B à 75 Hz ($V = \pm 5$ m/s, $U = \pm 10$ mm) et mode A à 85 Hz ($V = \pm 8$ m/s, $U = \pm 15$ mm)

Qui veut du streaming ?



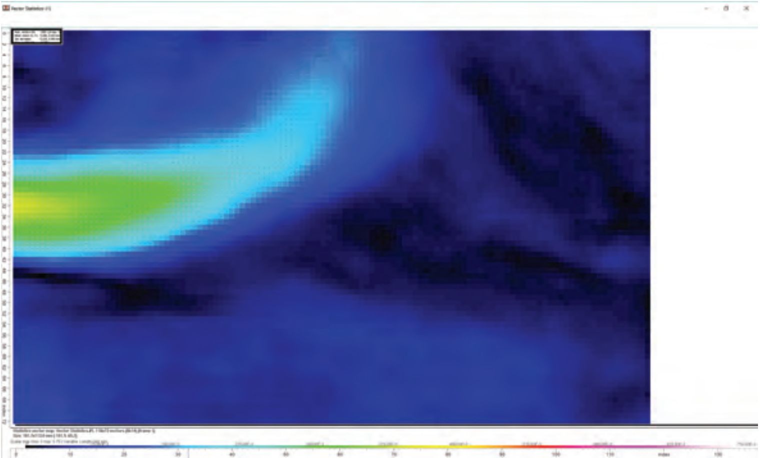
Forçage à 0,3V : mode A à 60 Hz ($V = \pm 2{,}5$ m/s, $U = \pm 6{,}7$ mm)

Qui veut du streaming ?



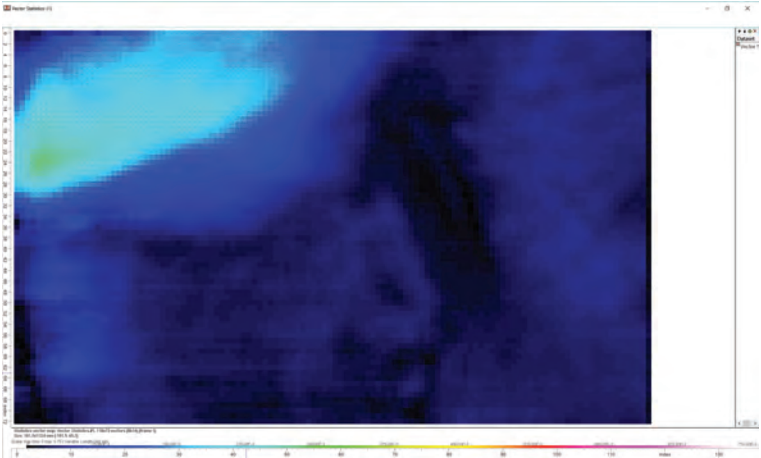
Forçage à 0,7V : mode B à 70 Hz ($V = \pm 3,4$ m/s, $U = \pm 8$ mm)

Qui veut du streaming ?



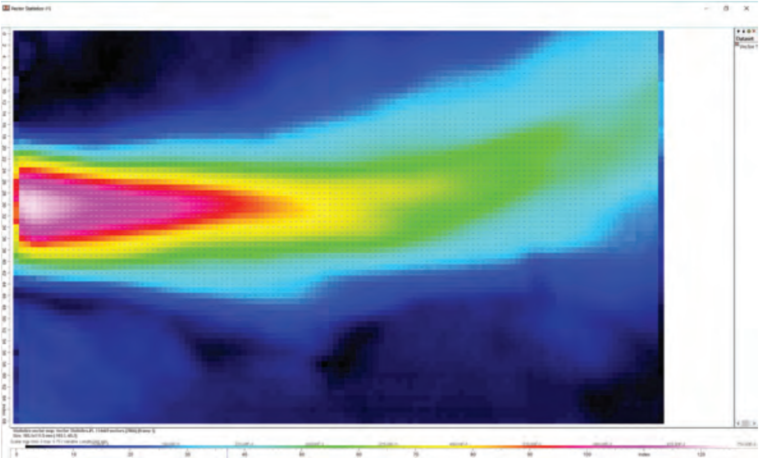
Forçage à 0,7V : mode A à 80 Hz ($V = \pm 6{,}6$ m/s, $U = \pm 13$ mm)

Qui veut du streaming ?



Forçage à 1V : mode B à 75 Hz ($V = \pm 5$ m/s, $U = \pm 10$ mm)

Qui veut du streaming ?



Forçage à 1V : mode A à 85 Hz ($V = \pm 8$ m/s, $U = \pm 15$ mm)

Qui veut du streaming ?

- Animation du forçage à 0,3 V : mode A à 30 Hz ($V = \pm 2,5$ m/s, $U = \pm 6,7$ mm)
- Animation du forçage à 0,7 V : mode B à 70 Hz ($V = \pm 3,4$ m/s, $U = \pm 8$ mm)
- Animation du forçage à 0,7 V : mode A à 80 Hz ($V = \pm 6,6$ m/s, $U = \pm 13$ mm)
- Animation du forçage à 1 V : mode B à 75 Hz ($V = \pm 5$ m/s, $U = \pm 10$ mm)
- Animation du forçage à 1V : mode A à 85 Hz ($V = \pm 8$ m/s, $U = \pm 15$ mm)

Qui veut du streaming ?

Quelques commentaires :

- À forte amplitude vibratoire, il y a une évidence d'écoulement (presque 1 m/s !)

Qui veut du streaming ?

Quelques commentaires :

- À forte amplitude vibratoire, il y a une évidence d'écoulement (presque 1 m/s !)
- Mode A
  - jet axial : effet des modes symétriques et de l'asymétrie naturelle de la mécanique des fluides
- Mode B
  - jet, semble-t-il, plus latéral : effet des modes non-symétriques ?

Qui veut du streaming ?

Quelques commentaires :

- À forte amplitude vibratoire, il y a une évidence d'écoulement (presque 1 m/s !)
- Mode A
  - jet axial : effet des modes symétriques et de l'asymétrie naturelle de la mécanique des fluides
- Mode B
  - jet, semble-t-il, plus latéral : effet des modes non-symétriques ?
- Pas encore de certitude que le mode A favorise cet écoulement. Mesures à affiner (une nouvelle campagne va débuter en Novembre)

Pour conclure

Quelques commentaires en forme de conclusion

- Les NESs vibroacoustiques fonctionnent, à très (trop) fort niveau pour l'instant
- Nombreuses possibilités de réglages
- Les modèles simplifiés semblent montrer leurs limites tout en restant indispensables à la compréhension des phénomènes
- Encore et toujours des grosses difficultés avec l'amortissement
- Comportements non triviaux des membranes
- Toujours réaliser des expériences !

Merci Claude-Henri pour tes délicieuses idées