Couplages en Automatique et Dynamique Non-Linéaire

Bernard Brogliato, INRIA univ. Grenoble-Alpes

Journée Claude Lamarque GdR EX-MODELI, Lyon, 17 octobre 2024

• **Automatique**: méthode dite de “backstepping”, basée sur les couplages entre plusieurs dynamiques. $\rightsquigarrow$ Systèmes dits “triangulaires”.
Origines: Lyukanov-Drakunov-Utkin 1984, 1990. Kokotovic-Kanellakopoulos 1991, 1994. Lozano-BB, 1991, 1992, 1995.

• **Dynamique non-linéaire**: absorbeurs ou puits ou lavabos d’énergie (nonlinear energy sinks NES), basés sur des couplages cubiques entre deux (ou plus) systèmes mécaniques.
Origines: Vakakis-Gendelman-Manevich 2001 (?)

Exemple (très) simple:

$$(a)\ \dot{x}_1 = x_2$$
$$(b)\ \dot{x}_2 = u$$

Etape 1: considérons x_2 comme une commande fictive pour (a): $x_2 = -x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1$.
Etape 2: x_2 est un état pas une entrée, alors on ajoute zéro dans (a): $\dot{x}_1 = x_{2,d} + \tilde{x}_2$, avec $\tilde{x}_2 = x_2 - x_{2,d}$, et on choisit: $x_{2,d} = -x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + \tilde{x}_2$.
Etape 3: Le but est d'obtenir $\tilde{x}_2 \rightarrow 0$. On a: $\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2,d}$, ce qui donne: $\dot{\tilde{x}}_2 = u + x_2$.
Etape 4: On choisit $u = -x_2 - \tilde{x}_2 = -x_2 - x_2 + x_{2d} = -2x_2 - x_1 \Rightarrow \dot{\tilde{x}}_2 = -\tilde{x}_2 \Rightarrow \tilde{x}_2 \rightarrow 0$.

Donc on obtient:

$$\begin{aligned}(a)\ \dot{x}_1 &= x_2\\ (b)\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - x_1\end{aligned}$$

ou $\dot{x} = Ax$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, valeurs propres -1, système exponentiellement stable.

Approche fonction de Lyapunov

Etape 2: Pour (a):

$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = x_1\dot{x}_1 = x_1x_2 = x_1(x_{2,d} + \tilde{x}_2)$

On choisit $x_{2,d} = -x_1 \Rightarrow \dot{V}_1 = -x_1^2 + x_1\tilde{x}_2$.

Etape 3: Ensuite avec (b):

$V_2(x_1, \tilde{x}_2) = \frac{\alpha}{2}\tilde{x}_2^2 \Rightarrow \dot{V}_2 = \alpha\tilde{x}_2\dot{\tilde{x}}_2 \Rightarrow \dot{V}_2 = \alpha\tilde{x}_2\dot{\tilde{x}}_2 = \alpha\tilde{x}_2(u + x_2)$.

Etape 4: Avec $u = -x_2 - \tilde{x}_2 \Rightarrow \dot{V}_2 = -\alpha\tilde{x}_2^2$

Donc:

$$V(x_1, \tilde{x}_2) = V_1 + V_2 \Rightarrow \dot{V} = -x_1^2 + x_1\tilde{x}_2 - \alpha\tilde{x}_2^2,$$

qui est une fonction de Lyapunov pour $\alpha > \frac{1}{4}$. Donc $x_1 \to 0$, $\tilde{x}_2 = x_2 + x_1 \to 0$ et donc $x_2 \to 0$.

$\rightsquigarrow$ Flexibilité dans le choix de u en modifiant V_1 et V_2. Par example $u = -x_2 - \tilde{x}_2 - x_1 \Rightarrow \dot{V}_2 = -\alpha\tilde{x}_2^2 - \alpha x_1\tilde{x}_2$, donc avec $\alpha = 1$ on obtient $\dot{V} = -x_1^2 - \tilde{x}_2^2$.

$\rightsquigarrow$ Extension au cas de n intégrateurs, ou systèmes triangulaires: $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, t) + x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, $\dot{x}_n = f_n(x, t) + u$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + a_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + a_2 u \end{aligned}$$

Leur dynamique Lagrangienne s'écrit [Spong, 1987]:

$$\begin{aligned} M_1(q_1)\ddot{q}_1 + C_1(q_1,\dot{q}_1)\dot{q}_1 + g_1(q_1) &= K(q_2 - q_1) \\ J\ddot{q}_2 &= u + K(q_1 - q_2) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ couplage par énergie potentielle d'élasticité

$$U(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^\top K(q_1 - q_2)$$

$K = K^\top \succ 0$

Il s'agit de commander la dynamique $(q_1, \dot{q}_1)$: on pose

$$Kq_2 = K q_{2,d} + K\tilde{q}_2$$

et on procède comme précédemment. Poursuite de trajectoires, commandes robuste, adaptative, passivity-based, *etc*.

[Lozano, BB, IEEE TAC 1992] [BB, Ortega, Lozano, Automatica 1995]

Ce sont des systèmes Lagrangiens de complémentarité (donc non-réguliers):

$$\begin{array}{l}
(a)\ M_1(q_1)\ddot{q}_1 + F_1(q_1,\dot{q}_1,t) = \frac{\partial h}{\partial q_1}^\top \lambda_{\mathrm{n}} + H_{\mathrm{t}}^1(q_1,q_2)\lambda_{\mathrm{t}} \\
(b)\ M_2(q_2)\ddot{q}_2 + F_2(q_2,\dot{q}_2,t) = \frac{\partial h}{\partial q_2}^\top \lambda_{\mathrm{n}} + H_{\mathrm{t}}^2(q_1,q_2)\lambda_{\mathrm{t}} + E(q_2)\tau \\
(c)\ 0 \le \lambda_{\mathrm{n}} \perp w = h(q_1,q_2) \ge 0 \\
(d)\ \text{Impact model } (p_{\mathrm{n}}, p_{\mathrm{t}}),\ \text{friction model } (\lambda_{\mathrm{t}}).
\end{array}$$

(a):objet
(b): système commandé
(c) (d): modèle de contact/impact

B.B., Annual Reviews in Control, vol.55, pp.297-337, 2023.

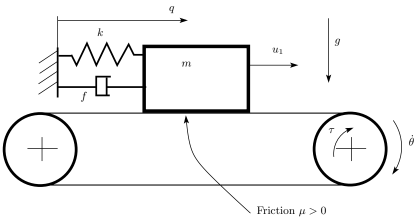

Figure: Oscillateur à frottement.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{q}(t) &= -kq(t) - f\dot{q}(t) + u_1(t) - \mu m g \lambda_{\mathrm{t}}(t)\\
I\ddot{\theta}(t) &= \tau(t) + r\mu m g \lambda_{\mathrm{t}}(t)\\
\lambda_{\mathrm{t}}(t) &\in \mathrm{sgn}(\dot{q}(t) - r\dot{\theta}(t))
\end{aligned}
$$

avec $u_1(t) = u_1(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))$, $\dot{\theta}$ the fictitious input to design λ_{t}.

$\rightsquigarrow$ poursuite de trajectoires [BB, Miranda-Villatoro, Younes, 2024]

[Gendelman, Gourdon, CHL, JSV, 2006] lisse cubique
[CHL, Gendelman, Savadkoohi, Etcheverria, Acta Mech., 2011]
non-régulier continu par morceaux
[Gourdon, Alexander, Taylor, CHL, Pernot, JSV, 2007] lisse cubique
[Nucera, Vakakis, McFarland, Bergman, Kerschen, Nonlin. Dyn, 2007]
non-régulier, vibro-impact

Forme générique:

$$
\begin{aligned}
m_2\ddot{x}_2 + f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= -F(x_2 - x_1) \\
m_1\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_1 &= F(x_2 - x_1) + u(t)
\end{aligned}
$$

où $F(x_2 - x_1)$ est:

- non-régulier continu linéaire par morceaux
- lisse non-linéaire cubique: $\epsilon(x_2 - x_1)^3$
- vibro-impact NES: contact force multiplier λ, impact model with CoR.

$\rightsquigarrow$ u(t) est une excitation (énergie) externe.

Backstepping (commande active):

- il s'agit de commander un système avec entrées, pour commander par le couplage (modèle, physique) un système non-commandé.
- Systèmes sous-actionnés, commandabilité.
- Le couplage de la partie commandée est compensé par la commande $\rightsquigarrow$ action “unilatérale”.
- Stabilité (Lyapunov) globale, poursuite de trajectoire pour le système non-actionné.
- Couplages “simples” souhaités (pas toujours possible, imposés par la modélisation, voir systèmes avec contact frottant et impacts).

NES ("commande" passive):

- couplages cubiques ou linéaires par morceaux ou par collisions.
- un objectif: tranfèrer l'énergie dans le système non-actionné.
- Modes non-linéaires, analyses numériques, stabilité locale, *etc.*
- $\rightsquigarrow$ Mise en oeuvre par commande "active" en utilisant une stratégie backstepping ?

1er problème (NES par commande active):

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 + f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= -k(x_2 - x_1) = kx_1 - kx_{2d} - k\tilde{x}_2 \\ m_1\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_1 &= k(x_2 - x_1) + u(t) \end{aligned}$$

On peut poser $x_{2d} = -\epsilon(x_1 - x_2)^3$, d'où
$\tilde{x}_2 = x_2 - x_{2d} \Rightarrow \ddot{\tilde{x}}_2 = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_{2d} = g(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) - 3\frac{\epsilon}{m_1}(x_1 - x_2)^2 u$,

2nd problème (backstepping avec couplages cubiques):

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 + f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= -\epsilon(x_2 - x_1)^3 \\ m_1\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_1 &= \epsilon(x_2 - x_1)^3 + u(t) \end{aligned}$$

On veut commander $(x_2, \dot{x}_2)$ par u. Mais
$(x_2 - x_1)^3 = (x_2 - x_1)^2(x_2 - x_1) \Rightarrow (x_2 - x_1)^2(x_{2d} + \tilde{x}_2)$: on retrouve le même problème! Peut-on commander par $(x_{2d} + \tilde{x}_2 - x_1)^3$? Peut-être... mais ça n'est pas vraiment l'objectif.