

Modèles élastoplastiques décrits par des inclusions différentielles maximales monotones

Journée hommage à Claude-Henri Lamarque

Jérôme Bastien

Laboratoire Inter-universitaire de Biologie de la Motricité/Polytech – Université
Lyon I

17 octobre 2024

Résumé

De ma thèse [Bas00] qu'il a codirigée (avec M. Schatzman) jusqu'à mon HDR [Bas13b] où il a été juré, en passant par deux ouvrages publiés [BBL12 ; BBL13], Claude Henri-Lamarque m'a permis de modéliser finement des lois élastoplastiques avec un nombre fini ou infini de degrés de liberté. Reprenant le formalisme d'inclusions différentielles maximales monotone, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité ainsi que de convergence de schémas numériques robustes, appliqués dans différents contextes mécaniques.

Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 3 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 4 Applications

Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 3 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 4 Applications

Contexte et Intérêt

1 Ingénierie

Contexte et Intérêt

- 1 Ingénierie
Rencontre avec Claude-Henri Lamarque à l'ENTPE à partir de 1991.

Contexte et Intérêt

- ① Ingénierie
- ② Mécanique

Contexte et Intérêt

- ① Ingénierie
- ② Mécanique
 - ① Modèles dissipatifs

Contexte et Intérêt

- ① Ingénierie
- ② Mécanique
 - ① Modèles dissipatifs
 - ② À petit nombre de degrés de liberté, puis à grand nombre, voire infini !

Contexte et Intérêt

- 1 Ingénierie
- 2 Mécanique
- 3 Mathématiques

Contexte et Intérêt

- ① Ingénierie
- ② Mécanique
- ③ Mathématiques
 - ① Soutien mathématique constant et très actif.

Contexte et Intérêt

- 1 Ingénierie
- 2 Mécanique
- 3 Mathématiques
 - 1 Soutien mathématique constant et très actif.
 - 2 Cadre monotone, maximal.

Contexte et Intérêt

Plus sérieusement

- 1 Ingénierie

Contexte et Intérêt

Plus sérieusement

- 1 Ingénierie
- 2 Mécanique

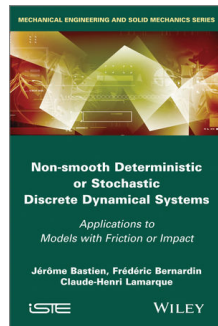
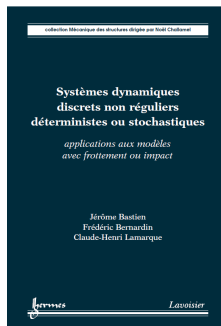
Contexte et Intérêt

Plus sérieusement

- 1 Ingénierie
- 2 Mécanique
- 3 Mathématiques

Références générales

On pourra consulter les ouvrages [BBL12 ; BBL13]



Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 3 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 4 Applications

Un premier exemple simple

On étudie le mouvement d'un solide de masse m , d'abscisse x et soumis à un frottement de Coulomb $g(t)$ et à une sollicitation externe $F(t)$.

La RFD fournit

$$m\ddot{x}(t) - g(t) = F(t)$$

Un premier exemple simple

On étudie le mouvement d'un solide de masse m , d'abscisse x et soumis à un frottement de Coulomb $g(t)$ et à une sollicitation externe $F(t)$.

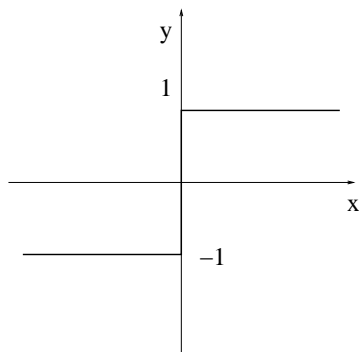
La RFD fournit

$$m\ddot{x}(t) - g(t) = F(t)$$

On introduit un opérateur multivoque, c'est-à-dire une application de \mathbb{R} dans l'ensemble des parties de \mathbb{R} . Soit donc σ donné par

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Le gaphe signe



On peut aussi voir l'opérateur comme une partie de \mathbb{R}^2 . On a tout simplement :

$$g(t) \in -\alpha \sigma(\dot{x}(t)). \quad (2)$$

L'inclusion différentielle simple

Il vient

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\sigma(\dot{x}(t)) \ni F(t)$$

soit encore en considérant la vitesse

$$\dot{y}(t) + \frac{\alpha}{m}\sigma(y(t)) \ni \frac{1}{m}F(t) \quad (3)$$

Sous-différentiel de fonctions convexes de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Définition

Si ϕ est convexe propre, le sous-différentiel $\partial\phi$ de ϕ est l'opérateur multivoque défini de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$y \in \partial\phi(x) \iff \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \phi(\xi) \geq y(\xi - x) + \phi(x). \quad (4)$$

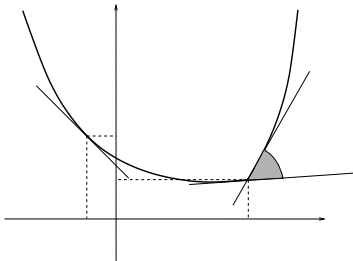
Sous-différentiel de fonctions convexes de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Définition

Si ϕ est convexe propre, le sous-différentiel $\partial\phi$ de ϕ est l'opérateur multivoque défini de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

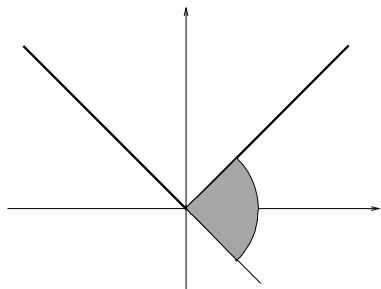
$$y \in \partial\phi(x) \iff \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \phi(\xi) \geq y(\xi - x) + \phi(x). \quad (4)$$

L'inéquation (4) signifie que y est la pente d'une droite qui passe par le point $(x, \phi(x))$ et qui se trouve entièrement sous le graphique de ϕ .

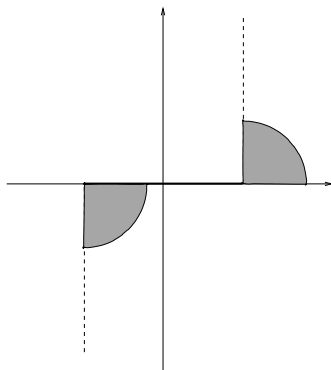


Sous-différentiel de fonctions convexes de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Exemple des graphes σ et β



$$\beta(x) = \begin{cases} \mathbb{R}_- & \text{si } x = -1, \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ \emptyset & \text{si } x \notin [-1, 1]. \end{cases} \quad (5)$$



Sous-différentiel de fonctions convexes de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Aspect maximal monotone

- Les sous-différentiels de fonctions convexes propres et s.c.i. sont maximaux monotones.
- Pour tout opérateur A , maximal monotone, et pour tout $\lambda > 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists! x \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda Ax \ni y. \quad (6)$$

- On peut donc considérer la résolvante $(I + \lambda A)^{-1}$ de A .

Sous-différentiel de fonctions convexes de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Aspect maximal monotone

- Les sous-différentiels de fonctions convexes propres et s.c.i. sont maximaux monotones.
- Pour tout opérateur A , maximal monotone, et pour tout $\lambda > 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists! x \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda Ax \ni y. \quad (6)$$

- On peut donc considérer la résolvente $(I + \lambda A)^{-1}$ de A .
- Les résolventes de σ et de β sont données par

$$(I + \lambda\sigma)^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\lambda, \lambda], \\ x - \lambda & \text{si } x \geq \lambda, \\ x + \lambda & \text{si } x \leq -\lambda, \end{cases} \quad (7)$$

$$(I + \lambda\beta)^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \\ -1 & \text{si } x \leq -1. \end{cases} \quad (8)$$

Extension à un espace de Hilbert H quelconque (séparable)

Toutes les définitions précédentes s'étendent à condition de remplacer le produit de \mathbb{R} par un produit scalaire sur H :
monotonie, maximalité, sous-différentiels, résolvante.

Existence, unicité et schéma numérique

- On considère A maximal monotone sur H et f assez régulière. D'après [Bré73], existence et unicité de la solution de l'inclusion différentielle qui généralise (3) :

$$\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t, u(t)), \quad (9)$$

avec une condition initiale.

- Dans *tous* les cas que l'on a rencontrés, $A = \partial\phi$.

Existence, unicité et schéma numérique

- On considère A maximal monotone sur H et f assez régulière. D'après [Bré73], existence et unicité de la solution de l'inclusion différentielle qui généralise (3) :

$$\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t, u(t)), \quad (9)$$

avec une condition initiale.

- Dans *tous* les cas que l'on a rencontrés, $A = \partial\phi$.
- Le schéma numérique d'Euler implicite s'écrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{h} + A(U^{n+1}) \ni f(t_n, U^n), \quad (10)$$

équivalent selon (6) à

$$U^{n+1} = (I + \lambda A)^{-1} (hf(t_n, U^n) + U^n). \quad (11)$$

Dans *de nombreux cas*, A est découpé et sa résolvante est exprimée en fonction des résolvantes des graphes σ et β .

Résultats d'existence et unicité et de convergence de schéma

Généralisant des résultats existant [Bré73 ; Bré72 ; Lip90], on obtient des résultats d'existence et unicité et de convergence de schéma en $O(h^{1/2})$ ou $O(h)$ [BS02 ; Bas13a], le dernier, plus complet, ayant été initialement présenté dans [BBL12 ; BBL13].

Changement de produit scalaire en dimension finie

Lemme

Soient \mathcal{M} une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ϕ une fonction convexe propre s.c.i. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique et du produit scalaire $\langle x, y \rangle_{\mathcal{M}}$ lié à la matrice \mathcal{M} et défini par

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{M}} = {}^t x \mathcal{M}^{-1} y. \quad (12)$$

On a

$$\partial_{\mathcal{M}} \phi = \mathcal{M} \partial \phi, \quad (13)$$

où $\partial_{\mathcal{M}}$ est le sous-différentiel de ϕ pour le produit scalaire défini par (12).

Changement de produit scalaire en dimension finie

Une conséquence importante de ce lemme est que l'on pourra, en dimension finie, aussi utiliser l'inclusion différentielle

$$\dot{u}(t) + \mathcal{M}\partial\phi(u(t)) \ni f(t, u(t)),$$

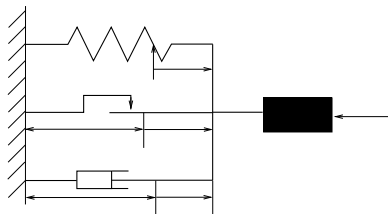
à la place de (9) avec $A = \partial\phi$.

Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 3 Association de modèles simples et présentation des modèles composés**
- 4 Applications

Deux modèles élémentaires

Modèle parallèle



Association d'un ressort, d'un *dashpot* et d'un élément de Saint-Venant en parallèle :

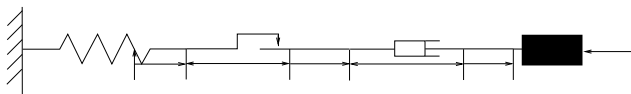
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (14a)$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) + \alpha\sigma(\dot{x}(t)) \ni F(t). \quad (14b)$$

Cette inclusion (classique) généralise (3).

Deux modèles élémentaires

Modèle série



Association d'un ressort, d'un *dashpot* et d'un élément de Saint-Venant en série : on inverse le graphe σ et on obtient l'inclusion :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (F - ku)/m, \\ \dot{u} + \beta(u/\eta) \ni y - ku/c. \end{cases} \quad (15)$$

Assemblage et résultats en dimension finie

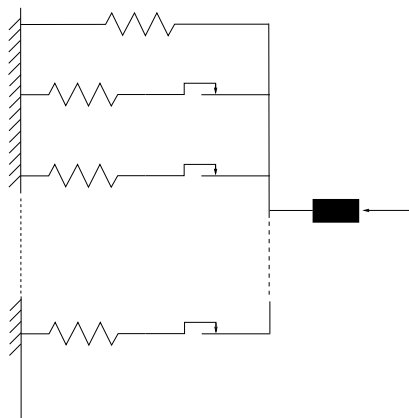
- Les deux modèles précédents, ainsi qu'un certain nombre d'associations finies de ressorts, d'éléments de Saint-Venant et de points matériels sont tous gouvernés (en utilisant dans certains cas, le changement du produit scalaire du lemme 2) par une inclusion du type (9) avec $A = \partial\phi$.

Assemblage et résultats en dimension finie

- Les deux modèles précédents, ainsi qu'un certain nombre d'associations finies de ressorts, d'éléments de Saint-Venant et de points matériels sont tous gouvernés (en utilisant dans certains cas, le changement du produit scalaire du lemme 2) par une inclusion du type (9) avec $A = \partial\phi$.
- On a donc existence et unicité de la solution,
- ainsi que la convergence d'ordre un du schéma numérique (10) ou (11).

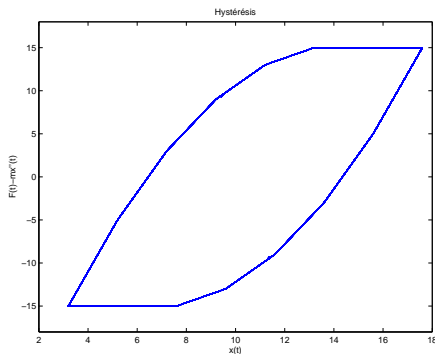
J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom". In : *Eur. J. Mech. A Solids* 19.2 (2000), pages 277–307. doi : 10.1016/S0997-7538(00)00163-7

Assemblage et résultats en dimension finie : exemple



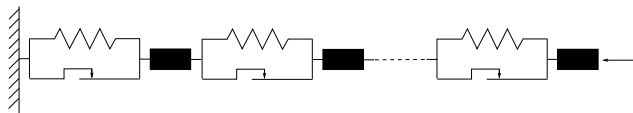
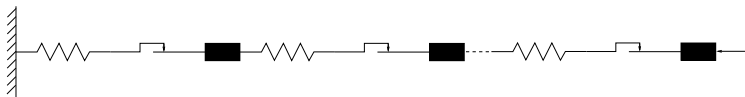
Modèle de Prandtl généralisé

Assemblage et résultats en dimension finie : exemple



Des simulations numériques montrent des cycles d'hystérésis polygonaux et convexes.

Assemblage et résultats en dimension finie : exemple



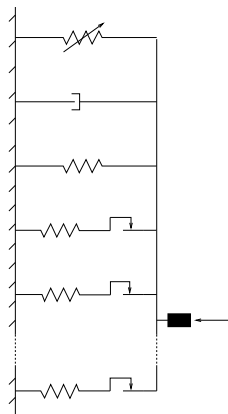
Ce dernier fait intervenir la fonction convexe définie par

$$\phi(X) = \phi(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 |x_1| + \sum_{i=2}^n \alpha_i |x_i - x_{i-1}|$$

Sommaire

- 1 Contexte et Intérêt
- 2 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 3 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 4 Applications**

Modèles Lipschitziens



Le modèle de Prandtl généralisé peut être modifié en mettant une non-linéarité régulière (en $-cx^3$) à la place du ressort.

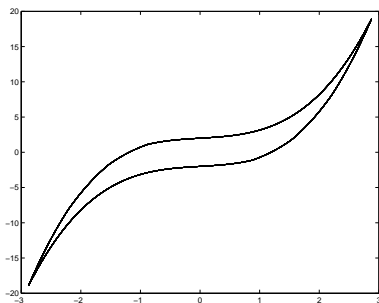
Modèles Lipschitziens

On obtient encore existence, unicité et convergence du schéma pour l'inclusion :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_0x + cx^3 + a\dot{x} + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}, \end{array} \right.$$

ou d'autres avec une non linéarité plus générale.

Modèles Lipschitziens

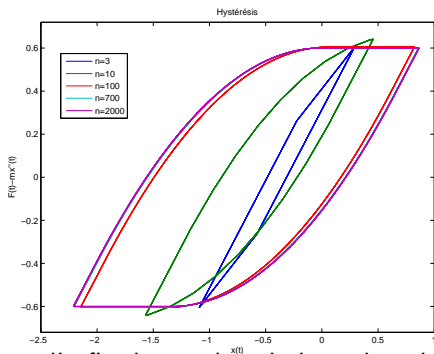


Les cycles d'hystérésis sont alors non convexes [Ber04] et

C.-H. Lamarque, F. Bernardin et J. Bastien. "Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases". In : *Eur. J. Mech. A Solids* 24.4 (2005), pages 572–592. doi :

10.1016/j.euromechsol.2005.05.001

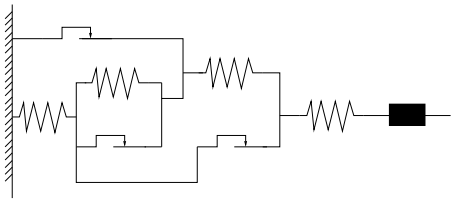
Modèle continu



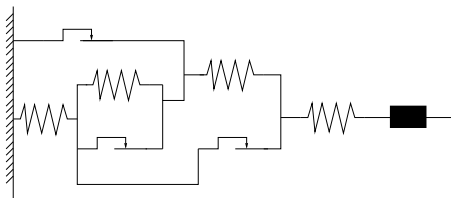
On fait tendre vers l'infini le nombre de branches du modèle de Prandtl. On obtient alors des cycles d'hystérésis continus, sans aspect anguleux, contrairement au cas discret.

J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of an elastoplastic model with an infinite number of internal degrees of freedom". In : *Eur. J. Mech. A Solids* 21.2 (2002), pages 199–222. doi : 10.1016/S0997-7538(01)01205-0

Modèle géphyroïde



Modèle géphyroïde



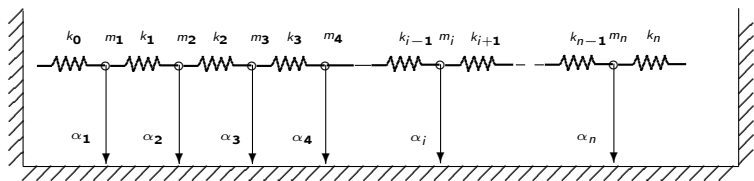
On transforme les équations obtenues, en conservant les variables adéquates, et en utilisant le changement du produit scalaire du lemme 2, on obtient encore une inclusion du type (9) avec $A = \partial\phi$.

J. Bastien et C. H. Lamarque. "Persoz's gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion". In : *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 78.5 (2008), pages 393–407. doi :

10.1007/s00419-007-0171-8

Chaîne élastoplastique

- Modèle de chaîne élastique avec contact de frottement sur un support fixe ;
- Différentes conditions initiales (force ou déplacement) ;
- Comportement dynamique ou quasi-statique.



J. Bastien et C.-H. Lamarque. "Theoretical study of a chain sliding on a fixed support". In : *Math. Probl. Eng.* 2009 (2009). Article ID 361296. doi : [10.1155/2009/361296](https://doi.org/10.1155/2009/361296)

Problèmes avec retard et mémoire

Voir le Master 2 [Hol01] et

C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Holland. “Study of a maximal monotone model with a delay term”. In : *SIAM J. Numer. Anal.* 41.4 (2003), pages 1286–1300. doi : [10.1137/S0036142902402547](https://doi.org/10.1137/S0036142902402547)

C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Holland. “Maximal monotone model with delay term of convolution”. In : *Math. Probl. Eng.* 4 (2005), pages 437–453. doi : [10.1155/MPE.2005.437](https://doi.org/10.1155/MPE.2005.437)

J. Bastien et C.-H. Lamarque. “Maximal monotone model with history term”. In : *Non linear Analysis* 63.5-7 (2005), e199–e207. doi : [10.1016/j.na.2005.03.103](https://doi.org/10.1016/j.na.2005.03.103)

J. Bastien et C.-H. Lamarque. “Non smooth dynamics of mechanical systems with history term”. In : *Nonlinear Dynam.* 47.1-3 (2007), pages 115–128. doi : [10.1007/s11071-006-9061-9](https://doi.org/10.1007/s11071-006-9061-9)

Une application industrielle : étude d'un tendeur de courroie



Lors d'une collaboration avec Régis Dufour et Guilhem Michon (INSA de Lyon), un tendeur de courroie de distribution a été modélisé [Bas+07].

D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)

On cherche à généraliser la loi de frottement de Coulomb unidimensionnelle (2) de façon à prendre en compte des lois plus générales.

D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)

On cherche à généraliser la loi de frottement de Coulomb unidimensionnelle (2) de façon à prendre en compte des lois plus générales.

On cherche à étudier une loi de frottement du type

$$g(t) \in -A(\dot{x}(t)), \quad (16a)$$

où l'opérateur multivoque est de la forme

$$A = \alpha_S \sigma + \Psi, \quad (16b)$$

où α_S est le coefficient de frottement statique, l'opérateur multivoque σ est défini par (1) et Ψ est une fonction régulière et vérifiant $\Psi(0) = 0$.

D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)

On cherche à généraliser la loi de frottement de Coulomb unidimensionnelle (2) de façon à prendre en compte des lois plus générales.

On cherche à étudier une loi de frottement du type

$$g(t) \in -A(\dot{x}(t)), \quad (16a)$$

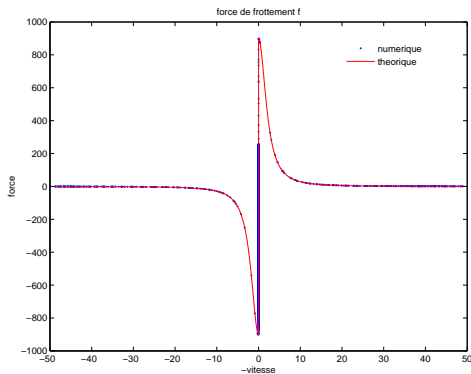
où l'opérateur multivoque est de la forme

$$A = \alpha_S \sigma + \Psi, \quad (16b)$$

où α_S est le coefficient de frottement statique, l'opérateur multivoque σ est défini par (1) et Ψ est une fonction régulière et vérifiant $\Psi(0) = 0$.

Voir [BBL12; BBL13].

Grandeur et décadence du problème de Stribeck



Pour des pentes pas trop raides, simulations présentées dans [BBL12 ; BBL13]. Sinon, dangers (grande sensibilité du modèle par rapport aux données) de ce modèles étudiés dans [BS08].

Conclusion

Un grand merci pour tout ce que tu m'as appris et apporté et permis de faire, scientifiquement, professionnellement et sur le plan personnel.

Conclusion

Un grand merci pour tout ce que tu m'as appris et apporté et permis de faire, scientifiquement, professionnellement et sur le plan personnel.

À tous mes autres collègues !



J. Bastien, G. Michon, L. Manin et R. Dufour. “An analysis of the modified Dahl and Masing models : application to a belt tensioner”. In : *J. Sound Vibration* 302.4-5 (2007), pages 841–864. doi : 10.1016/j.jsv.2006.12.013.



J. Bastien. “Étude théorique et numérique d’inclusions différentielles maximales monotones. Applications à des modèles élastoplastiques.”. Numéro d’ordre : 96-2000. Thèse de doctorat. Université Lyon I, 2000.



J. Bastien. “Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions”. In : *Z. Angew. Math. Phys.* 64.4 (2013), pages 955–966. doi : 10.1007/s00033-012-0276-y.



J. Bastien. “Systèmes dynamiques discrets avec frottement et Identification en biomécanique”. Disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste_publis.html à la référence “[d2]”. Numéro d’ordre : 26-2013. Mémoire d’Habilitation à Diriger des Recherches. Université Lyon I, 18 sept. 2013.



J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques. Applications*

aux modèles avec frottement ou impact. Collection Mécanique des structures. Ouvrage traduit en anglais (voir [BBL13]). Voir <http://www.lavoisier.fr/livre/h3908.html> Disponible à la BU Sciences de Lyon 1 (cote : 74 BASTIEN, UFR Maths, sous-sol). Hermès Science Publications/Lavoisier, 2012. 532 pages.



J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems. Applications to Models with Friction or Impact*. Mechanical Engineering and Solid Mechanics Series. Traduction en anglais de [BBL12]. Voir <http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1848215258.html>. Wiley-ISTE, 2013. 512 pages.



F. Bernardin. “Equations différentielles stochastiques multivoques - Aspects théoriques et numériques - Applications”. Numéro d'ordre : 243-2004. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008778>. Thèse de doctorat. Université Lyon I, 2004.



J. Bastien et C.-H. Lamarque. “Maximal monotone model with history term”. In : *Non linear Analysis* 63.5-7 (2005), e199–e207. doi : 10.1016/j.na.2005.03.103.



J. Bastien et C.-H. Lamarque. “Non smooth dynamics of mechanical systems with history term”. In : *Nonlinear Dynam.* 47.1-3 (2007), pages 115–128. doi : 10.1007/s11071-006-9061-9.



J. Bastien et C. H. Lamarque. “Persoz’s gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion”. In : *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 78.5 (2008), pages 393–407. doi : 10.1007/s00419-007-0171-8.



J. Bastien et C.-H. Lamarque. “Theoretical study of a chain sliding on a fixed support”. In : *Math. Probl. Eng.* 2009 (2009). Article ID 361296. doi : 10.1155/2009/361296.



H. Brézis. “Problèmes unilatéraux”. In : *J. Math. Pures Appl.* 51 (1972), pages 1–168.



H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1973, pages vi+183.



J. Bastien et M. Schatzman. “Numerical precision for differential inclusions with uniqueness”. In : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 36.3 (2002), pages 427–460. doi : 10.1051/m2an:2002020.



J. Bastien et M. Schatzman. "Indeterminacy of a dry friction problem with viscous damping involving stiction". In : *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 88.4 (2008), pages 243–255. doi : 10.1002/zamm.200700022.



J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom". In : *Eur. J. Mech. A Solids* 19.2 (2000), pages 277–307. doi : 10.1016/S0997-7538(00)00163-7.



J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of an elastoplastic model with an infinite number of internal degrees of freedom". In : *Eur. J. Mech. A Solids* 21.2 (2002), pages 199–222. doi : 10.1016/S0997-7538(01)01205-0.



M. Holland. "Prise en compte d'effets différés dans des systèmes discrets comportant des nonlinéarités irrégulières". *Mémoire de master*. Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, 2001.



C.-H. Lamarque, F. Bernardin et J. Bastien. "Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases". In : *Eur. J. Mech. A Solids* 24.4 (2005), pages 572–592. doi : 10.1016/j.euromechsol.2005.05.001.



C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Holland. “Study of a maximal monotone model with a delay term”. In : *SIAM J. Numer. Anal.* 41.4 (2003), pages 1286–1300. doi : 10.1137/S0036142902402547.



C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Holland. “Maximal monotone model with delay term of convolution”. In : *Math. Probl. Eng.* 4 (2005), pages 437–453. doi : 10.1155/MPE.2005.437.



G. Lippold. “Error estimates for the implicit Euler approximation of an evolution inequality”. In : *Nonlinear Anal.* 15.11 (1990), pages 1077–1089.