

Paramétrisation de variétés invariantes pour problèmes dépendant d'un paramètre : cas de la bifurcation de Hopf

André de F. Stabile^(a), Alessandra Vizzaccaro^(b), Loïc Salles^(c), Alessio Colombo^(d), Attilio Frangi^(d), Cyril Touzé^(a)

^(a)IMSIA - CNRS - EDF - CEA, ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris

^(b)College of Engineering, Mathematics and Physical Sciences, University of Exeter

^(c)Department of Aerospace & Mechanical Engineering, University of Liège

^(d)Department of Civil and Environmental Engineering, Politecnico di Milano

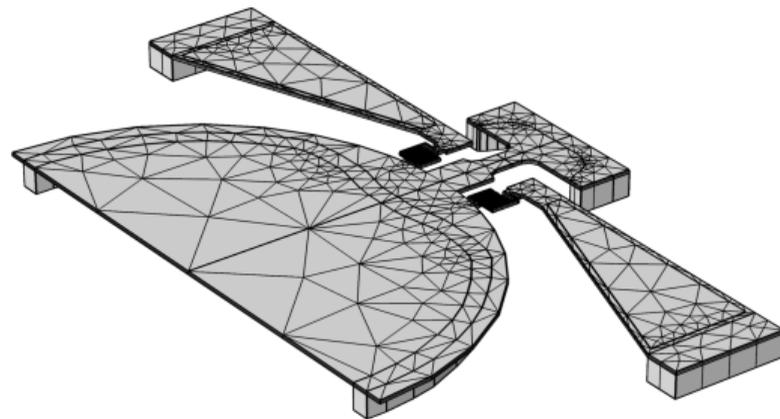
Journées du GdR EX-MODELI
Octobre 2024
Lyon

Méthode de paramétrisation de variétés invariantes [\[Cabré et al. \(2003a,b, 2005\)\]](#)

- ▶ Technique de réduction de modèle

Méthode de paramétrisation de variétés invariantes [Cabré et al. (2003a,b, 2005)]

- ▶ Technique de réduction de modèle



$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{F}(t)$$

↓ Réduction

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$$

Méthode de paramétrisation de variétés invariantes [Cabré et al. (2003a,b, 2005)]

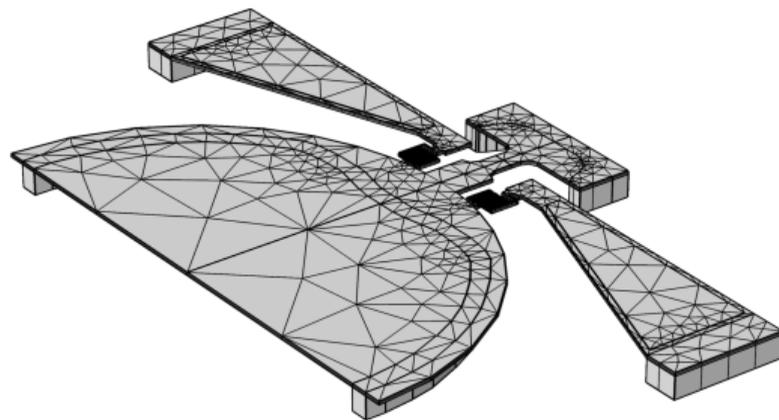
- ▶ Technique de réduction de modèle
- ▶ **Développements asymptotiques** autour d'un point fixe du système

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{z}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

- ▶ $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^D$, vecteur d'état

- ▶ $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$, coordonnées normales

$$d \ll D$$



$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{F}(t)$$

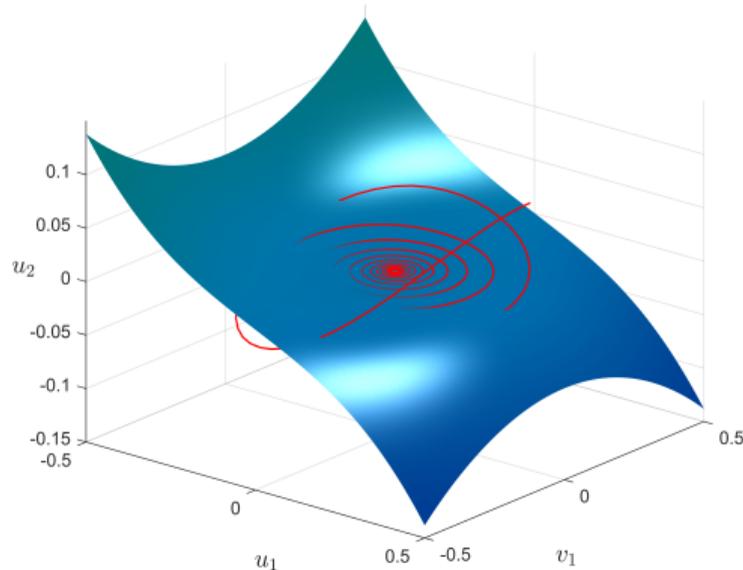


Réduction

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$$

Méthode de paramétrisation de variétés invariantes [Cabré et al. (2003a,b, 2005)]

- ▶ Variétés invariantes dans l'espace de phase : LSMs/SSMs [Shaw and Pierre (1991); Haller and Ponsioen (2016)]. **Extension** directe du concept de **mode linéaire**.



Cette contribution

- ▶ **Étendre** la méthode de paramétrisation pour traiter systèmes **bifurquants**.

Cette contribution

- ▶ **Étendre** la méthode de paramétrisation pour traiter systèmes **bifurquants**.
- ▶ Inclusion du paramètre de bifurcation comme une **variable ajoutée** [Vizzaccaro et al. (2024); Li and Wang (2024)].

Cette contribution

- ▶ **Étendre** la méthode de paramétrisation pour traiter systèmes **bifurquants**.
- ▶ Inclusion du paramètre de bifurcation comme une **variable ajoutée** [Vizzaccaro et al. (2024); Li and Wang (2024)].
- ▶ **Stratégie** basée dans une analyse de stabilité linéaire pour **choisir les modes maîtres**.

Cette contribution

- ▶ **Étendre** la méthode de paramétrisation pour traiter systèmes **bifurquants**.
- ▶ Inclusion du paramètre de bifurcation comme une **variable ajoutée** [Vizzaccaro et al. (2024); Li and Wang (2024)].
- ▶ **Stratégie** basée dans une analyse de stabilité linéaire pour **choisir les modes maîtres**.
- ▶ Exemples illustratifs : pendule de Ziegler et colonne de Beck.

Plan de la présentation

- ▶ Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation
- ▶ Pendule de Ziegler
 - ▶ Analyse de stabilité linéaire
 - ▶ Choix des modes maîtres
 - ▶ Résultats
- ▶ Colonne de Beck
- ▶ Conclusion

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

On considère problèmes de la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}_t &= \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_t) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{y}_t, \mu_t) + \mathbf{Q}_3(\mu_t, \mu_t), \\ \dot{\mu}_t &= 0.\end{aligned}$$

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

On considère problèmes de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}_t &= \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_t) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{y}_t, \mu_t) + \mathbf{Q}_3(\mu_t, \mu_t), \\ \dot{\mu}_t &= 0. \end{aligned}$$

Avec

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}, \quad \mu_t = \mu_0 + \mu$$

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

On considère problèmes de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}_t &= \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_t) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{y}_t, \mu_t) + \mathbf{Q}_3(\mu_t, \mu_t), \\ \dot{\mu}_t &= 0. \end{aligned}$$

Avec

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}, \quad \mu_t = \mu_0 + \mu$$

\mathbf{y}_0 point fixe :

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_0 + \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{y}_0, \mu_0) + \mathbf{Q}_3(\mu_0, \mu_0) = \mathbf{0}$$

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

On considère problèmes de la forme

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_t) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{y}_t, \mu_t) + \mathbf{Q}_3(\mu_t, \mu_t),$$

$$\dot{\mu}_t = 0.$$

Avec

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}, \quad \mu_t = \mu_0 + \mu$$

\mathbf{y}_0 point fixe :

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_0 + \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{y}_0, \mu_0) + \mathbf{Q}_3(\mu_0, \mu_0) = \mathbf{0}$$

On retrouve donc le système augmenté

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{\mathbf{y}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_t} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mu \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{y}, \mu) + \mathbf{Q}_3(\mu, \mu) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}})}$$

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

L'idée est donc d'introduire une **paramétrisation** telle que :

$$y = \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}}),$$

où le paramètre est **une variable normale supplémentaire** :

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

L'idée est donc d'introduire une **paramétrisation** telle que :

$$y = \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}}),$$

où le paramètre est **une variable normale supplémentaire** :

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mu \end{bmatrix}.$$

La **dynamique réduite** sur la variété s'écrit

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}), \quad \text{avec} \quad f_{d+1}(\tilde{\mathbf{z}}) = 0,$$

puisque le paramètre a une dynamique triviale :

$$\dot{\mu} = 0$$

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

La paramétrisation et la dynamique réduite sont cherchées sous forme de fonctions polynomiales :

$$\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{p=1}^o [\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}})]_p = \sum_{p=1}^o \sum_{k=1}^{m_p} \mathbf{W}^{(p,k)} \mathbf{z}^{\alpha(p,k)}$$

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{p=1}^o [\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}})]_p = \sum_{p=1}^o \sum_{k=1}^{m_p} \mathbf{f}^{(p,k)} \mathbf{z}^{\alpha(p,k)},$$

Méthode de paramétrisation directe - Inclusion du paramètre de bifurcation

La paramétrisation et la dynamique réduite sont cherchées sous forme de fonctions polynomiales :

$$\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{p=1}^o [\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}})]_p = \sum_{p=1}^o \sum_{k=1}^{m_p} \mathbf{W}^{(p,k)} \mathbf{z}^{\alpha(p,k)}$$
$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{p=1}^o [\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}})]_p = \sum_{p=1}^o \sum_{k=1}^{m_p} \mathbf{f}^{(p,k)} \mathbf{z}^{\alpha(p,k)},$$

A chaque ordre on résout une équation homologique :

$$\mathbf{B}[\nabla_{\tilde{\mathbf{z}}} \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}})]_p = \mathbf{A}[\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}})]_p + [\mathbf{Q}(\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}}), \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{z}}))]_p,$$

pour trouver les vecteurs de coefficients $\mathbf{W}^{(p,k)}$ et $\mathbf{f}^{(p,k)}$ pour chaque monôme.

Exemple illustratif - Pendule de Ziegler [Ziegler (1952)]

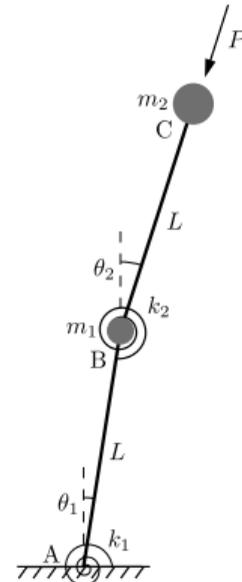
L'équation du mouvement est [Luongo and D'Annibale (2015)] :

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}_{nl},$$

avec $\mathbf{C} = 2(\xi_m \mathbf{M} + \xi_k \mathbf{K})$ et

$$\mathbf{M} = L^2 \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_g = PL \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{nl} = -\frac{PL}{6} \begin{bmatrix} (\theta_1 - \theta_2)^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$



Exemple illustratif - Pendule de Ziegler [Ziegler (1952)]

L'équation du mouvement est [Luongo and D'Annibale (2015)] :

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}_{nl},$$

avec $\mathbf{C} = 2(\xi_m \mathbf{M} + \xi_k \mathbf{K})$ et

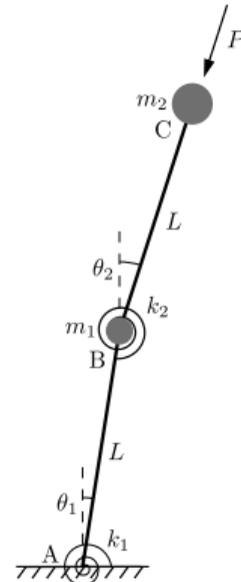
$$\mathbf{M} = L^2 \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_g = PL \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{nl} = -\frac{PL}{6} \begin{bmatrix} (\theta_1 - \theta_2)^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

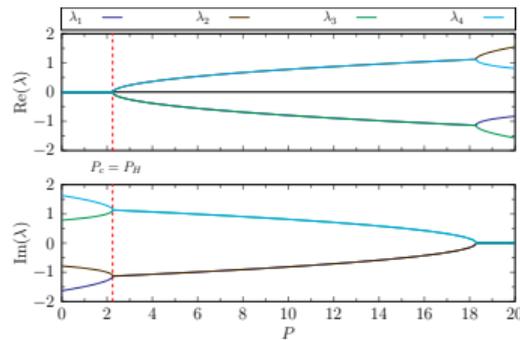
et les paramètres choisis sont

$$k_1 = \delta^2 k_2, \quad m_1 = \gamma^2 m_2, \quad k_2 = m_2 = 1,$$

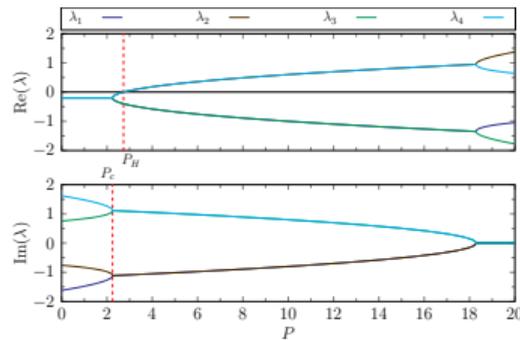
$$\delta^2 = \frac{41}{4}, \quad \gamma = \frac{5}{2}.$$



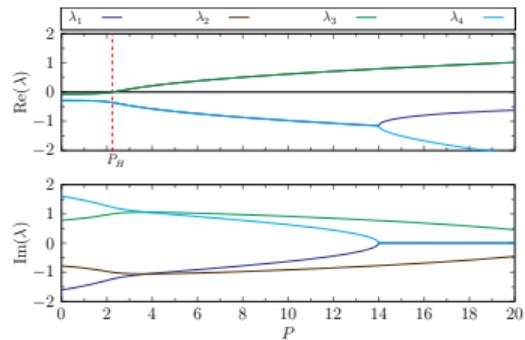
Analyse de stabilité linéaire et choix des modes maîtres



(a) Système conservatif

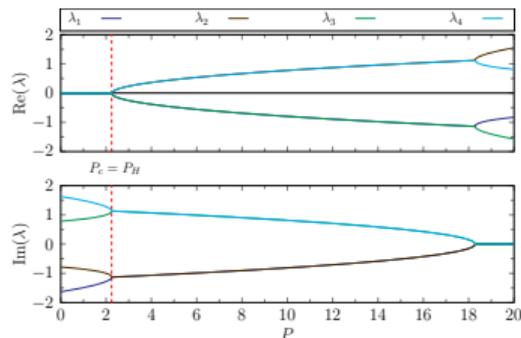


(b) $\xi_m = 0.2$ et $\xi_k = 0$

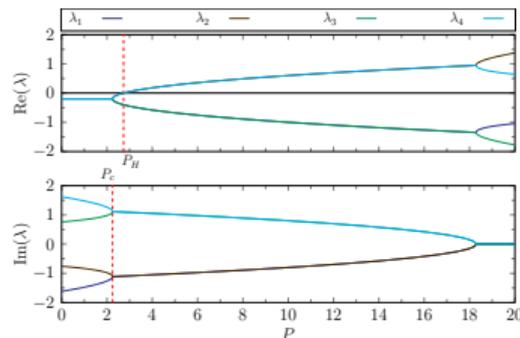
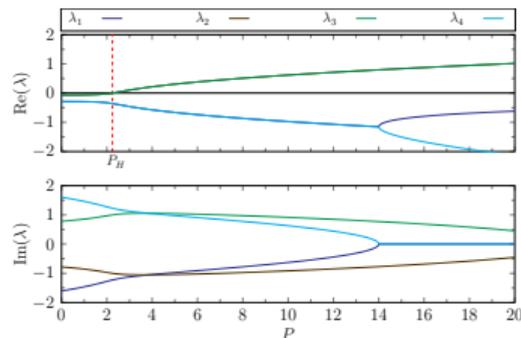


(c) $\xi_m = 0$ et $\xi_k = 0.1$

Analyse de stabilité linéaire et choix des modes maîtres

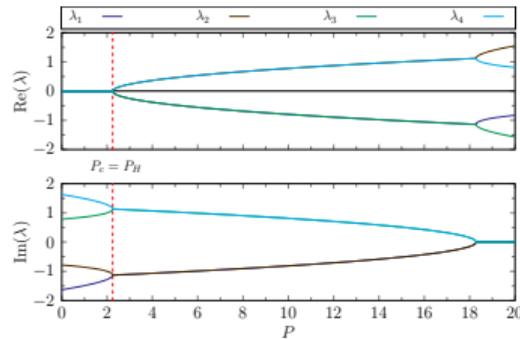


(a) Système conservatif

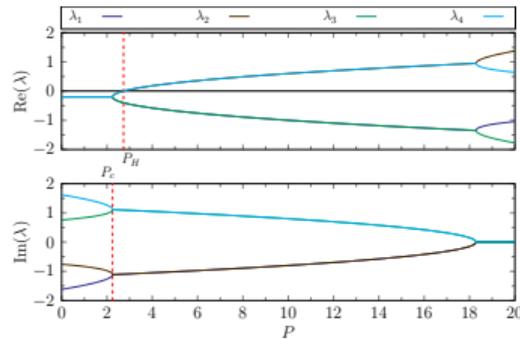
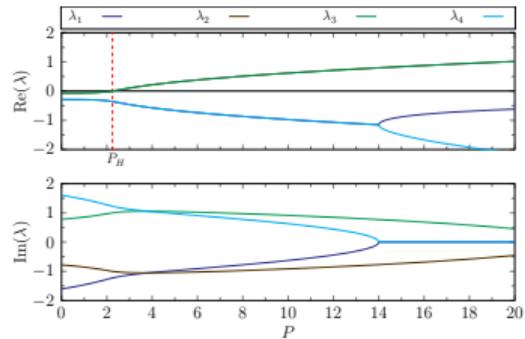
(b) $\xi_m = 0.2$ et $\xi_k = 0$ (c) $\xi_m = 0$ et $\xi_k = 0.1$

- Système conservatif : deux fréquences propres se confondent à la bifurcation.

Analyse de stabilité linéaire et choix des modes maîtres

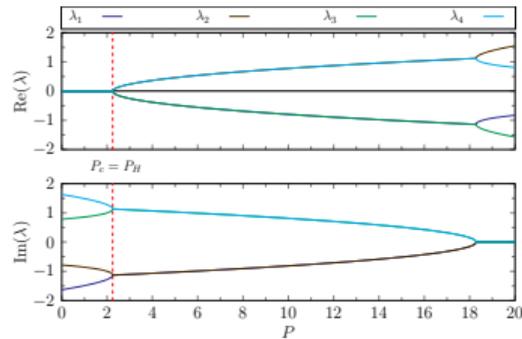


(a) Système conservatif

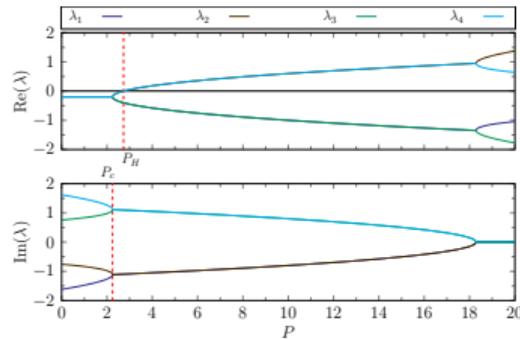
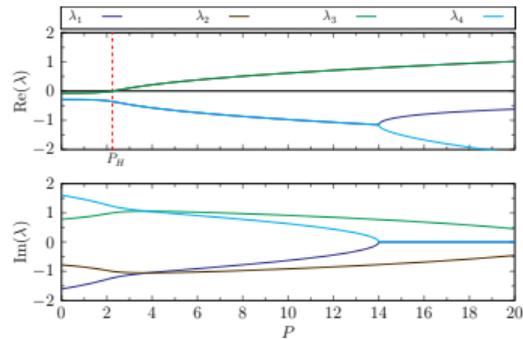
(b) $\xi_m = 0.2$ et $\xi_k = 0$ (c) $\xi_m = 0$ et $\xi_k = 0.1$

- ▶ Système conservatif : deux fréquences propres se confondent à la bifurcation.
- ▶ La variété centrale est de dimension 4. Une résonance 1 :1 se produit.

Analyse de stabilité linéaire et choix des modes maîtres

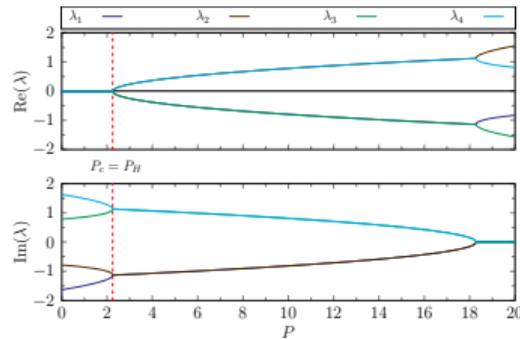


(a) Système conservatif

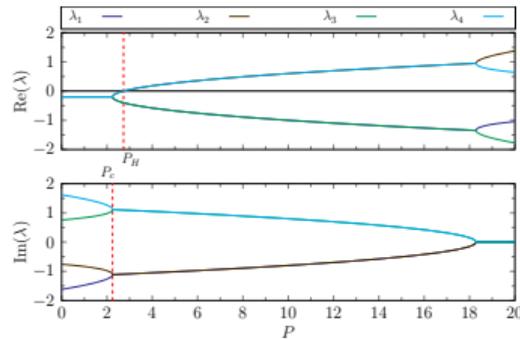
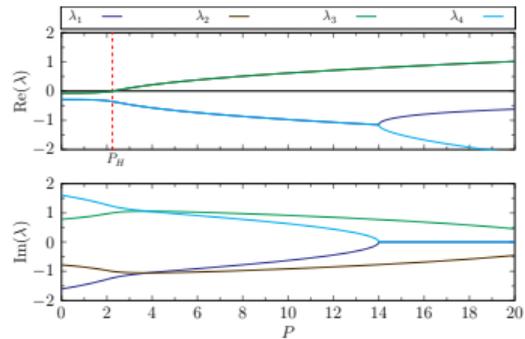
(b) $\xi_m = 0.2$ et $\xi_k = 0$ (c) $\xi_m = 0$ et $\xi_k = 0.1$

- ▶ Système conservatif : deux fréquences propres se confondent à la bifurcation.
- ▶ La variété centrale est de dimension 4. Une résonance 1 :1 se produit.
- ▶ Systèmes amortis : existence de quasi-résonances.

Analyse de stabilité linéaire et choix des modes maîtres

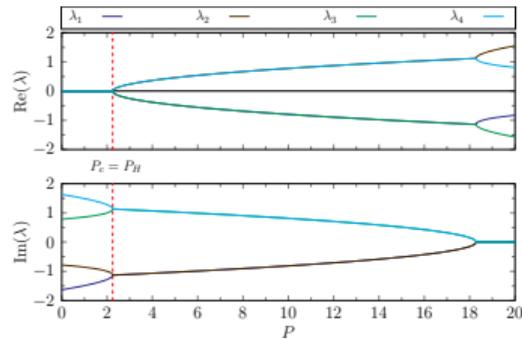


(a) Système conservatif

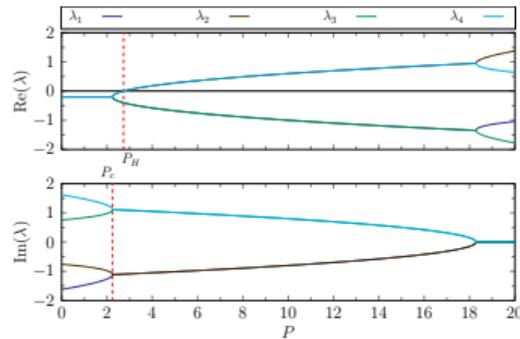
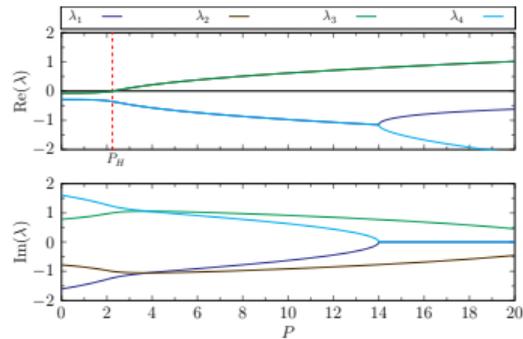
(b) $\xi_m = 0.2$ et $\xi_k = 0$ (c) $\xi_m = 0$ et $\xi_k = 0.1$

- ▶ Système conservatif : deux fréquences propres se confondent à la bifurcation.
- ▶ La variété centrale est de dimension 4. Une résonance 1 :1 se produit.
- ▶ Systèmes amortis : existence de quasi-résonances.
- ▶ Notre choix : utilisation de deux modes maîtres dans la paramétrisation.

Analyse de stabilité linéaire et choix des modes maîtres



(a) Système conservatif

(b) $\xi_m = 0.2$ et $\xi_k = 0$ (c) $\xi_m = 0$ et $\xi_k = 0.1$

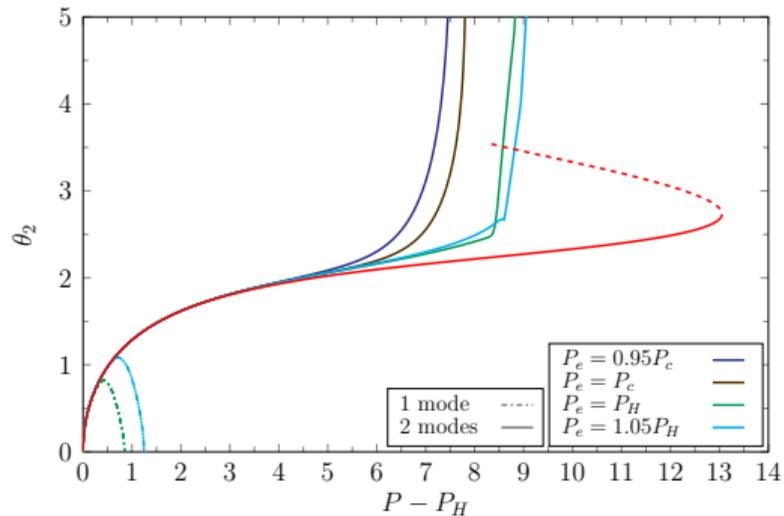
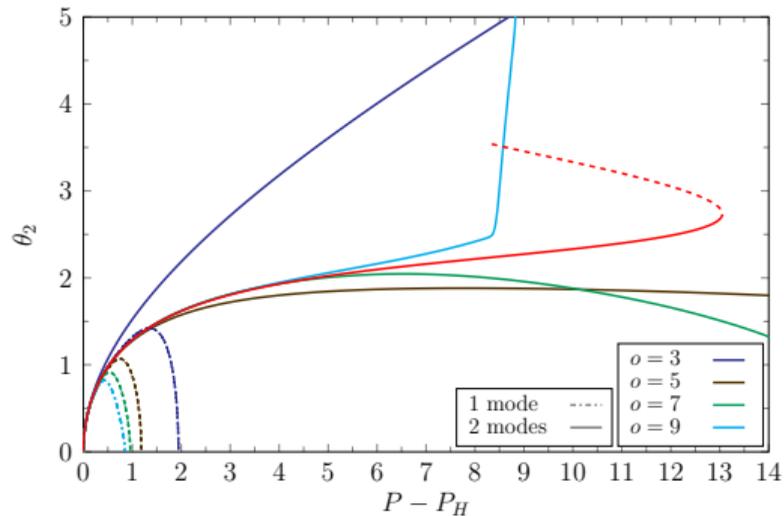
- ▶ Système conservatif : deux fréquences propres se confondent à la bifurcation.
- ▶ La variété centrale est de dimension 4. Une résonance 1 :1 se produit.
- ▶ Systèmes amortis : existence de quasi-résonances.
- ▶ Notre choix : utilisation de deux modes maîtres dans la paramétrisation.
- ▶ Un autre choix : ne retenir que le mode instable [Li and Wang (2024)].

Diagrammes de bifurcation - Amortissement proportionnel à la masse

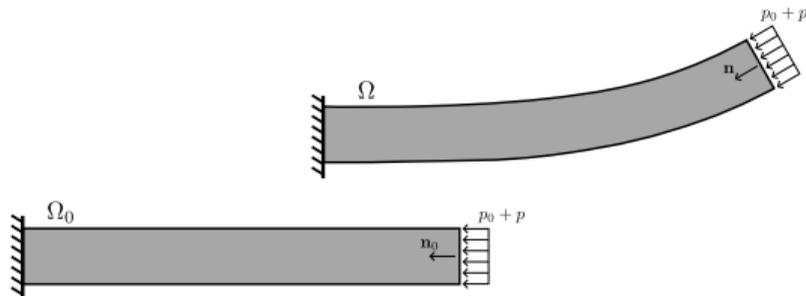
- ▶ But : construire un seul modèle réduit, à un point d'expansion P_e , et l'utiliser pour tracer le diagramme de bifurcation du système.

Diagrammes de bifurcation - Amortissement proportionnel à la masse

- But : construire un seul modèle réduit, à un point d'expansion P_e , et l'utiliser pour tracer le diagramme de bifurcation du système.

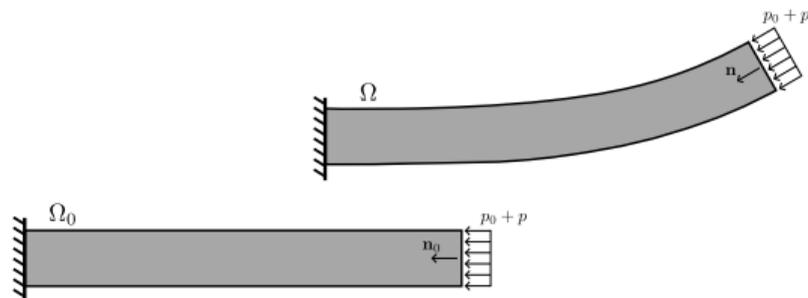


Colonne de Beck

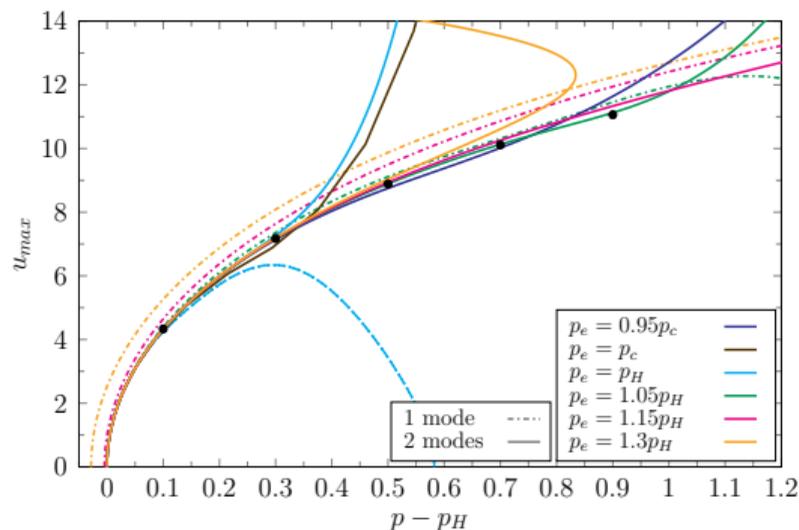


- ▶ Colonne soumise à une force suiveuse
- ▶ Modèle en éléments finis plans
- ▶ ~ 300 degrés de liberté

Colonne de Beck



- ▶ Colonne soumise à une force suivieuse
- ▶ Modèle en éléments finis plans
- ▶ ~ 300 degrés de liberté



Conclusion

- ▶ Une approche pour construire des modèles réduits dépendant d'un paramètre a été montrée.

Conclusion

- ▶ Une approche pour construire des modèles réduits dépendant d'un paramètre a été montrée.
- ▶ Il est possible de retrouver des diagrammes de bifurcation avec un modèle réduit construit pour une seule valeur de paramètre de contrôle.

Conclusion

- ▶ Une approche pour construire des modèles réduits dépendant d'un paramètre a été montrée.
- ▶ Il est possible de retrouver des diagrammes de bifurcation avec un modèle réduit construit pour une seule valeur de paramètre de contrôle.
- ▶ L'approche proposée s'est montrée valide pour une plage de paramètres plus grande que la stratégie d'un seul mode.

Conclusion

- ▶ Une approche pour construire des modèles réduits dépendant d'un paramètre a été montrée.
- ▶ Il est possible de retrouver des diagrammes de bifurcation avec un modèle réduit construit pour une seule valeur de paramètre de contrôle.
- ▶ L'approche proposée s'est montrée valide pour une plage de paramètres plus grande que la stratégie d'un seul mode.
- ▶ Paramétriser après la bifurcation semble donner des meilleurs résultats.

MERCI
DE VOTRE ATTENTION

andre.de-figueiredo-stabile@ensta-paris.fr



References I

- X. Cabré, E. Fontich, and R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds. I. Manifolds associated to non-resonant subspaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(2) :283–328, 2003a.
- X. Cabré, E. Fontich, and R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds. II. Regularity with respect to parameters. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(2) :329–360, 2003b.
- X. Cabré, E. Fontich, and R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds. III. Overview and applications. *J. Differential Equations*, 218(2) :444–515, 2005.
- G. Haller and S. Ponsioen. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds : existence, uniqueness and use in model reduction. *Nonlinear Dynamics*, 86(3) :1493–1534, 2016.
- L. Jézéquel and C. H. Lamarque. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3) :429–459, 1991.

References II

- Mingwu Li and Lin Wang. Parametric model reduction for a cantilevered pipe conveying fluid via parameter-dependent center and unstable manifolds. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 160 :104629, 2024. ISSN 0020-7462. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104629>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746223002810>.
- Mingwu Li, Shobhit Jain, and George Haller. Model reduction for constrained mechanical systems via spectral submanifolds. *Nonlinear Dynamics*, 111(10) :8881–8911, February 2023. ISSN 1573-269X. doi : [10.1007/s11071-023-08300-5](https://doi.org/10.1007/s11071-023-08300-5). URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-023-08300-5>.
- Angelo Luongo and Francesco D’Annibale. Linear and nonlinear damping effects on the stability of the ziegler column. In Mohamed Belhaq, editor, *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*, pages 335–352, Cham, 2015. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-19851-4.

References III

- S. W. Shaw and C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991.
- S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1) :85–124, 1993.
- C. Touzé and M. Amabili. Non-linear normal modes for damped geometrically non-linear systems : application to reduced-order modeling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, 298(4-5) :958–981, 2006.
- C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273 (1-2) :77–101, 2004.
- A. Vizzaccaro, G. Gobat, A. Frangi, and C. Touzé. Direct parametrisation of invariant manifolds for forced non-autonomous systems including superharmonic resonances. *Nonlinear Dynamics*, 112 :6255–6290, 2024.

References IV

H. Ziegler. Die stabilitätskriterien der elastomechanik. *Ingenieur-Archiv*, 20(1) :49–56, Jan 1952. ISSN 1432-0681. doi : 10.1007/BF00536796. URL <https://doi.org/10.1007/BF00536796>.