Formulations projectives en analyse vibratoire non régulière

GdR ExModeli : Exploitation et Modélisation des Dynamiques Non Linéaires

Mathias Legrand

Université McGill, Montréal, Canada

28 novembre 2024

Introduction

- Non-linéarités non-régulières en mécanique des structures
  - frottement sec (Coulomb) et contact unilatéral (Signorini)
  - exemple industriel : aube de turbomachines
- Formulation
  - formalisme explicite : complémentarité sous forme d'égalités et d'inégalités[1]
  - formalisme implicite : égalités non-régulières avec projection[1][2]
- Résolution temporelle
  - méthode à pas de temps ou à détection d'événements
  - méthode de tir pour les solutions périodiques
  - pénalisation, méthode des multiplicateurs de Lagrange
- Résolution fréquentielle : équilibrage harmonique
  - alternance temps/fréquence (AFT)[3] et méthode hybride temps/fréquence (HFT)[4]
    - régularisation de la non-régularité et/ou élimination de la masse à l'interface de contact
  - méthode DLFT : Dynamic Lagrangian Frequency/Time[5]
  - AFT/HFT/DLFT : Fourier en déplacement, force de contact traitée en temps (semi-primales)

---

[1] Acary and Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems: Applications in mechanics and electronics*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Verlag, 2008.

[2] Xuewen, Soh, and Wanji. "A new non-smooth model for three dimensional frictional contact problems". *Computational Mechanics* (2000).

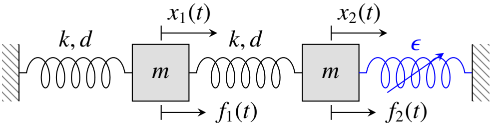
[3] Cameron and Griffin. "An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems". *Journal of Applied Mechanics* (1989).

[4] Poudou and Pierre. "Hybrid Frequency-Time Domain Methods for the Analysis of Complex Structural Systems with Dry Friction Damping". *44th Structural Dynamics and Materials Conference*. 2003.

[5] Nacivet, Pierre, Thouverez, and Jézéquel. "A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems". *Journal of Sound and Vibration* (2003).

Exemple illustratif : solutions périodiques en dynamique régulière

- Oscillateur à deux degrés de liberté avec raideur cubique



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), f_{\text{nl}}(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \qquad \text{[masse 1]} \qquad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - f_{\text{nl}} = 0 \qquad \text{[masse 2]} \qquad (2)$$

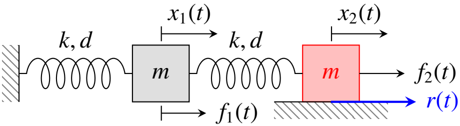
$$\Psi_{\text{nl}}(x_2, f_{\text{nl}}) = f_{\text{nl}} + \epsilon x_2^3 = 0 \qquad \text{[raideur cubique]} \qquad (3)$$

- (Re-)Formulation classique explicite
  - inverser $\Psi_{\text{nl}}(x_2, f_{\text{nl}})$ dans l'Équation (3) en $f_{\text{nl}}(x_2) = -\epsilon x_2^3$
  - insérer dans l'Équation (2)
  - résoudre les Équations (1) et (2) par équilibrage harmonique

- Fonction $\Psi_{\text{nl}}(x_2, f_{\text{nl}})$ non inversible?
  - formalisme des Équations Différentielles Algébriques
  - méthode de l'équilibrage harmonique

Exemple illustratif : dynamique non-régulière

- Système



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), r(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \qquad \text{[masse 1]} \qquad (4)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - r = 0 \qquad \text{[masse 2]} \qquad (5)$$

$$\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r) = 0 \qquad \text{[Loi de Coulomb/Tresca]} \qquad (6)$$

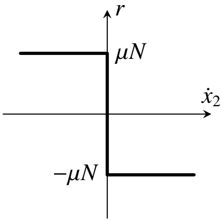
- Questions
  - expression de $\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r)$?
  - inversibilité de $\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r)$?

Loi de Coulomb/Tresca

- Formulation[6]

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 0 & \Rightarrow \quad |r| \leq \mu N & \text{[collement ou transition glissement]} \\ \dot{x}_2 \neq 0 & \Rightarrow \quad r = -\mu N \dot{x}_2 / |\dot{x}_2| & \text{[glissement]} \end{cases} \tag{7}$$

- Ensemble admissible



- Problème : application multivoque r en fonction de $\dot{x}_2$ (ou vice-versa)
  - pas d'application univoque $r(\dot{x}_2)$ (ou $\dot{x}_2(r)$)
  - résolution : régularisation de la loi de frottement et/ou suppression de la masse en frottement
  - niveau-0 de la fonction implicite $\Psi_\mathrm{r}(\dot{x}_2, r)$[7][8][9] $\rightarrow$ ensemble $(\dot{x}_2, r)$ tel que $\Psi_\mathrm{r}(\dot{x}_2, r) = 0$

---

[6] Acary, Brémond, and Huber. "On solving contact problems with Coulomb friction: formulations and numerical comparisons". *Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*. Springer, 2018.

[7] Alart and Curnier. "A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods". *CMAME* (1991).

[8] Le van and Nguyen. "A weighted residual relationship for the contact problem with Coulomb friction". *Computers & Structures* (2009).

[9] Ben Dhia and Zammali. "Level-Sets and Arlequin framework for dynamic contact problems". *European Journal of Computational Mechanics* (2004).

Formalisme avec égalité : $\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r) = 0$ (1/2)

- Expression possible[10]

$$\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, \rho(r + \mu N) - \dot{x}_2) + \max(0, \rho(r - \mu N) - \dot{x}_2); \quad \rho > 0 \tag{8}$$

- Fonction niveau-0 = ensemble de Coulomb

$$\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} r = \mu N & \text{si} & \dot{x}_2 < 0 \\ \dot{x}_2 = 0 & \text{si} & -\mu N \leq r \leq \mu N \\ r = -\mu N & \text{si} & \dot{x}_2 > 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Équation (7)} \tag{9}$$

- Projecteur[11][12][13]

$$\mathrm{proj}_{D(\mu N)}(r - \rho \dot{x}_2) = \left\{ \begin{array}{lll} +\mu N & \text{si} & r - \rho \dot{x}_2 > \mu N \\ r - \rho \dot{x}_2 & \text{si} & -\mu N \leq r - \rho \dot{x}_2 \leq \mu N \\ -\mu N & \text{si} & r - \rho \dot{x}_2 < -\mu N \end{array} \right. \tag{10}$$

- Fonction niveau-0 = ensemble de Coulomb

$$\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r) = r - \mathrm{proj}_{D(\mu N)}(r - \rho \dot{x}_2) = 0, \quad \rho > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Équation (9)} \tag{11}$$

[10] Leung, Guoqing, and Wanji. “Smoothing Newton method for solving two- and three-dimensional frictional contact problems”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1998).

[11] Moreau. “Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics”. *Nonsmooth Mechanics and Applications*. CISM. Springer, 1988.

[12] Leine and Nijmeijer. *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer, 2006.

[13] Charroyer, Chiello, and Sinou. “Self-excited vibrations of a non-smooth contact dynamical system with planar friction based on the shooting method”. *International Journal of Mechanical Sciences* (2018).

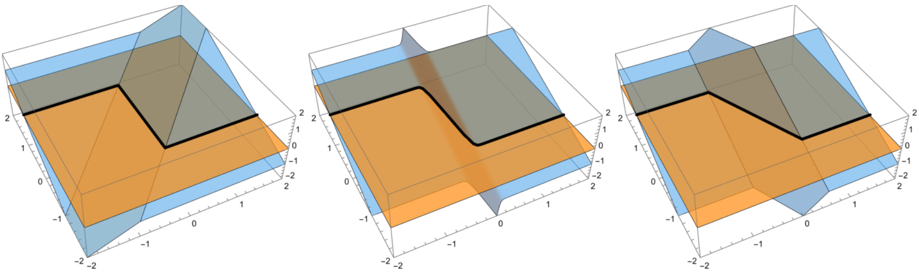


Figure 1: Fonction $\Psi_r(\dot{x}_2, r)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Coulomb ≡ intersection

De gauche à droite

- $\Psi_r(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, r + \mu N - \dot{x}_2) + \max(0, r - \mu N - \dot{x}_2)$ [exact, non-régulier, multivoque]
- $\Psi_r(\dot{x}_2, r) = r + \mu N \tanh(\beta \dot{x}_2)$ [régulier, univoque]
- $\Psi_r(\dot{x}_2, r) = r + \mu N(\beta \dot{x}_2 + \min(1 - \beta \dot{x}_2, 0) + \max(-1 - \beta \dot{x}_2, 0))$ [non régulier, univoque]

- Dynamique

$$\Psi_1(x_1, x_2) = m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 \cos \omega t = 0 \tag{12}$$
$$\Psi_2(x_1, x_2, r) = m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - r = 0 \tag{13}$$
$$\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, r + \mu N - \dot{x}_2) + \max(0, r - \mu N - \dot{x}_2) = 0 \tag{14}$$

$\rightarrow$ Equation différentielle algébrique non-régulière

- Solution périodique approchée

$$x_i(t) \approx x_{1h}(t) = \sum_{k=1}^{N_h} x_{ik}\phi_k(t), \quad i = 1, 2 \qquad r(t) \approx r_h(t) = \sum_{k=1}^{N_h} r_k\phi_k(t) \tag{15}$$

  - $\phi_k(t)$: famille de fonctions de forme
  - fonctions de Fourier $\rightarrow$ HBM : $\phi_k(t) = (\cos k\omega t, \sin k\omega t)$ dans la suite
  - notation : $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r}) \equiv (x_{1k}, x_{2k}, r_k)_{k=1,\ldots,N_h}$
  - $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r})$: participations des fonctions de forme choisies $\rightarrow$ à calculer!

- Dérivées en temps terme à terme (pour x_1 et x_2)

$$\dot{x}_i(t) \approx \dot{x}_{1h}(t) = \sum_{k} x_{ik}\dot{\phi}_k(t), \qquad \ddot{x}_i(t) \approx \ddot{x}_{ih}(t) = \sum_{k} x_{ik}\ddot{\phi}_k(t), \quad i = 1, 2 \tag{16}$$

Formulation de Galerkin (2/2)

- Résidus pondérés → quadrature numérique si nécessaire (FFT, trapèzes)

$$\forall k,\ \int_0^T \phi_k(t)\,\Psi_1(x_{1h}(t), x_{2h}(t))\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{[dyn. masse 1: linéaire en } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \tag{17}$$

$$\forall k,\ \int_0^T \phi_k(t)\,\Psi_2(x_{1h}(t), x_{2h}(t), r_h(t))\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{[dyn. masse 2: linéaire en } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r})] \tag{18}$$

$$\forall k,\ \int_0^T \phi_k(t)\,\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{[frottement : non-régulier en } (\mathbf{x}_2, \mathbf{r})] \tag{19}$$

- Systèmes d'équations régulières et non-régulières : $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$(17) \rightarrow \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \qquad \text{[régulière, exacte]} \tag{20}$$

$$(18) \rightarrow \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 - \mathbf{A}_{2r}\mathbf{r} - \mathbf{f}_2 = \mathbf{0} \qquad \text{[régulière, exacte]} \tag{21}$$

$$(19) \rightarrow \mathbf{g}_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \mathbf{0} \qquad \text{[non-régulière, numérique]} \tag{22}$$

with

$$\mathbf{g}_{\mathrm{r}k}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \phi_k(t)\,\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))\,\mathrm{d}t \tag{23}$$

- Solveurs
  - Newton non régulier ou similaire
  - `fsolve/root` de Matlab®/Python® → Powell hybride : procédure à région de confiance dogleg

Illustration de $\mathbf{g}_{\mathrm{r}k}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \phi_k(t)\, \Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))\, \mathrm{d}t$

- Approximation à un terme ($\phi = \cos t$) (par simplicité)

$$x_{2h}(t) = a\cos t, \quad \dot{x}_{2h}(t) = -a\sin t, \quad r_h(t) = b\cos t \tag{24}$$

- Equation non-régulière de Coulomb/Tresca

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{r}}(a,b) &= \int_0^T \phi(t)\, \Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))\, \mathrm{d}t = \int_0^T \cos t\, \Psi_{\mathrm{r}}(-a\sin t, b\cos t)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \cos t \left[-a\sin t + \min[0, b\cos t + \mu N - a\sin t] + \max[0, b\cos t - \mu N - a\sin t]\right] \mathrm{d}t = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

- Approximation par somme de Riemann (par simplicité)
  - discrétisation par N pas de temps sur $[0, T]$ de longueur $h = T/N$
  - $t_i = (i-1)h$, $i = 0, \ldots, N-1$
  - intégrale approchée pour (a, b) donné

$$g_{\mathrm{r}}(a,b) \approx \frac{T}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \cos t_i \left[-a\sin t_i + \min[0, b\cos t_i + \mu N - a\sin t_i] + \max[0, b\cos t_i - \mu N - a\sin t_i]\right] \tag{26}$$

Illustration de $\mathbf{g}_{\mathrm{r}k}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \phi_k(t)\, \Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))\, \mathrm{d}t$

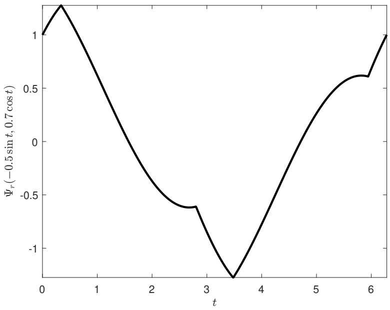


Figure 2: $\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ et $a = -0.5$, $b = 0.7$

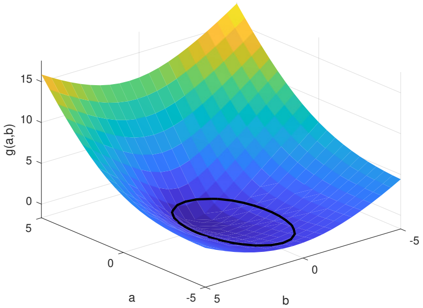


Figure 3: $g_{\mathrm{r}}(a, b)$ sur $(a, b) \in [-5, 5] \times [-5, 5]$ et $\mu N = 1$

Jacobien « *faible* » défini par morceaux

- Équations (20) et (21) résolues exactement par substitution → relation affine $\mathbf{x}_2 = \mathbf{B}\mathbf{r} + \mathbf{c}$ insérée dans l'Équation (22) → $\mathbf{g}_\mathsf{r}(\mathbf{x}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
- Jacobien *faible*

$$(\nabla_\mathbf{r}\mathbf{g}_\mathsf{r})_{kj} = \frac{\partial g_{\mathsf{r}k}}{\partial r_j} = \frac{\partial}{\partial r_j}\int_0^T \phi_k(t)\Psi_\mathsf{r}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^T \phi_k(t)\frac{\partial}{\partial r_j}\Psi_\mathsf{r}(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

- Dérivée de fonctions composées (correct avec $\max$ et $\min$)

$$\frac{\partial \Psi_\mathsf{r}}{\partial r_j} = \frac{\partial \Psi_\mathsf{r}}{\partial \dot{x}_{2h}}\frac{\partial \dot{x}_{2h}}{\partial r_j} + \frac{\partial \Psi_\mathsf{r}}{\partial r_h}\frac{\partial r_h}{\partial r_j} \tag{25}$$

avec ($H \equiv$ fonction de Heaviside)

$$\frac{\partial \Psi_\mathsf{r}}{\partial \dot{x}_{2h}} = H(r_h + \mu N - \dot{x}_{2h}) - H(r_h - \mu N - \dot{x}_{2h}) \tag{26}$$

et

$$\frac{\partial \Psi_\mathsf{r}}{\partial r_h} = 1 - H(r_h + \mu N - \dot{x}_{2h}) + H(r_h - \mu N - \dot{x}_{2h}) \tag{27}$$

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

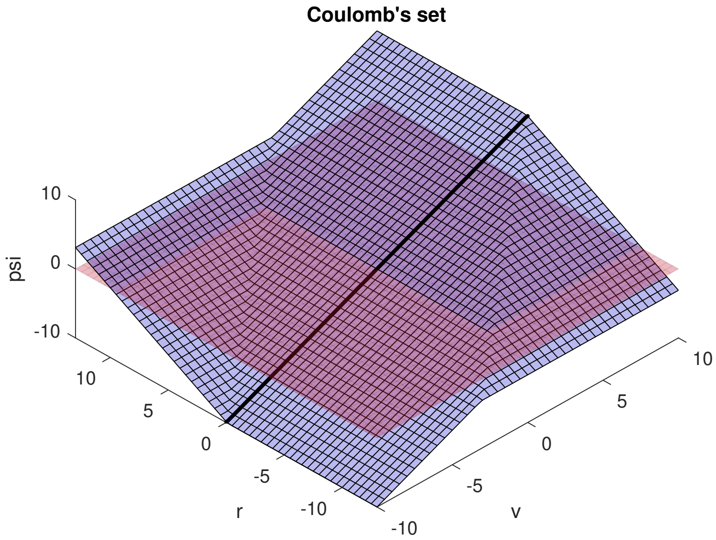


Figure 4: Itération 1

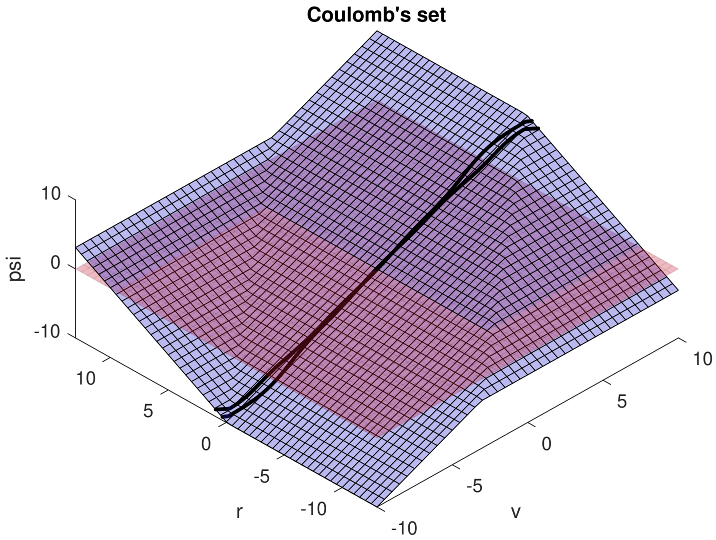


Figure 4: Itération 2

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

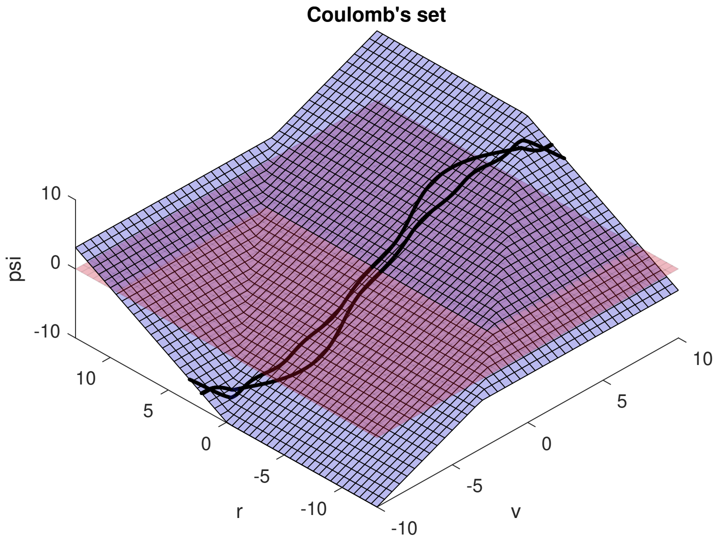


Figure 4: Itération 3

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

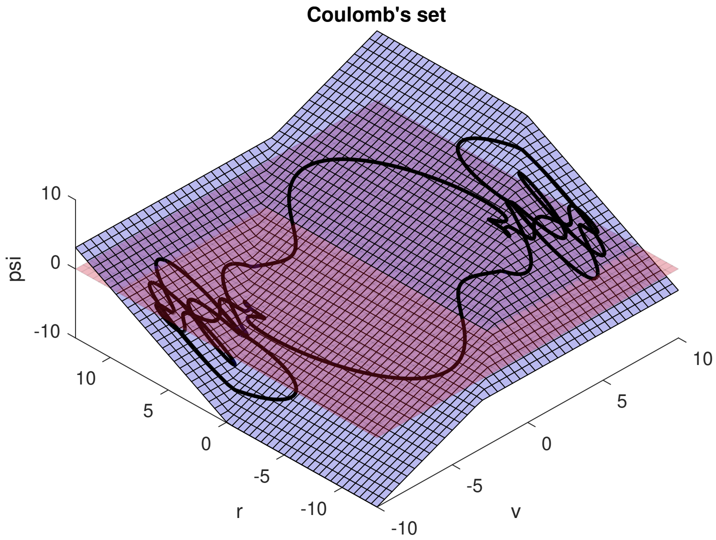


Figure 4: Itération 4

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

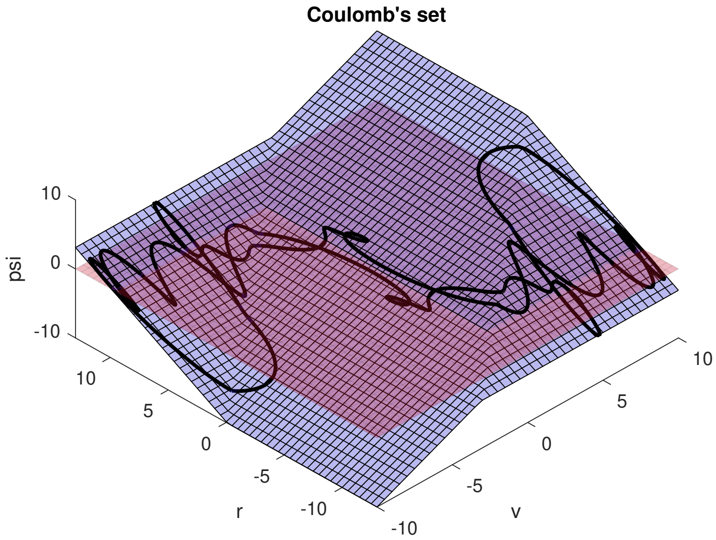


Figure 4: Itération 5

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

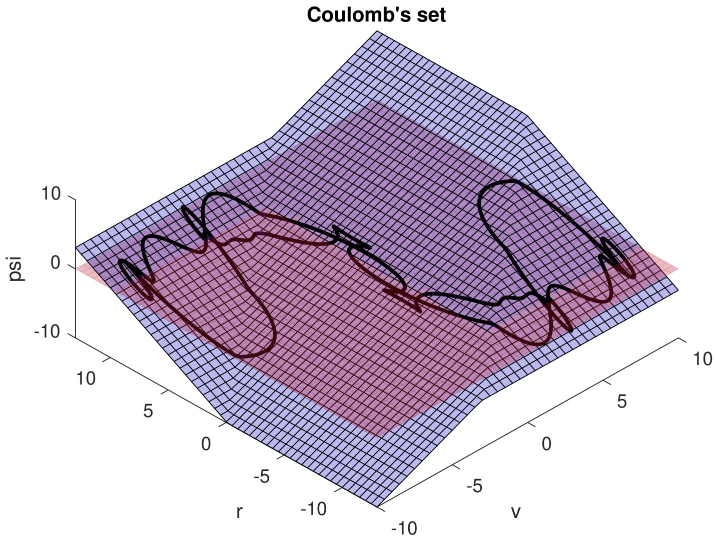


Figure 4: Itération 6

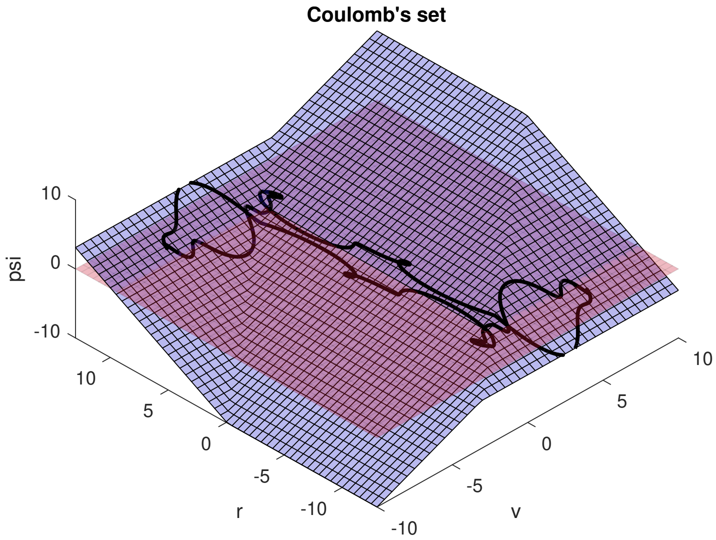


Figure 4: Itération 7

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

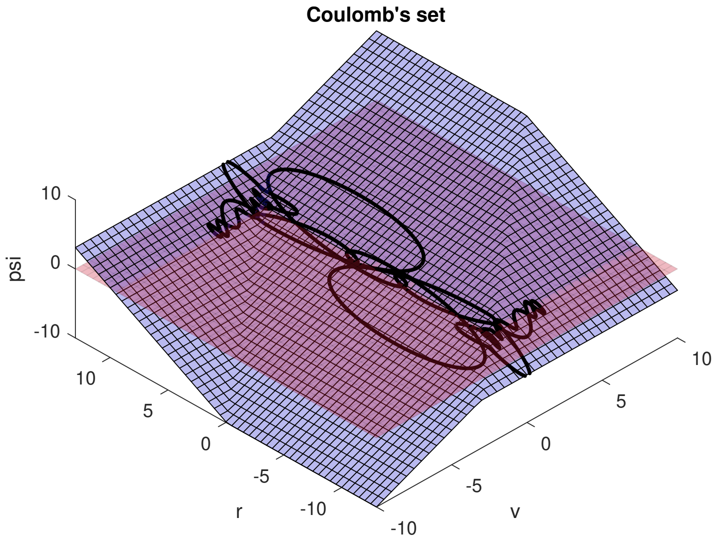


Figure 4: Itération 8

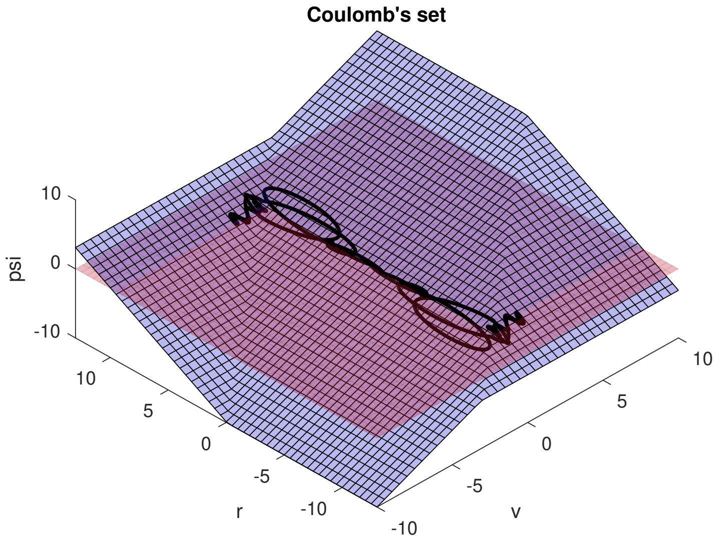


Figure 4: Itération 9

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

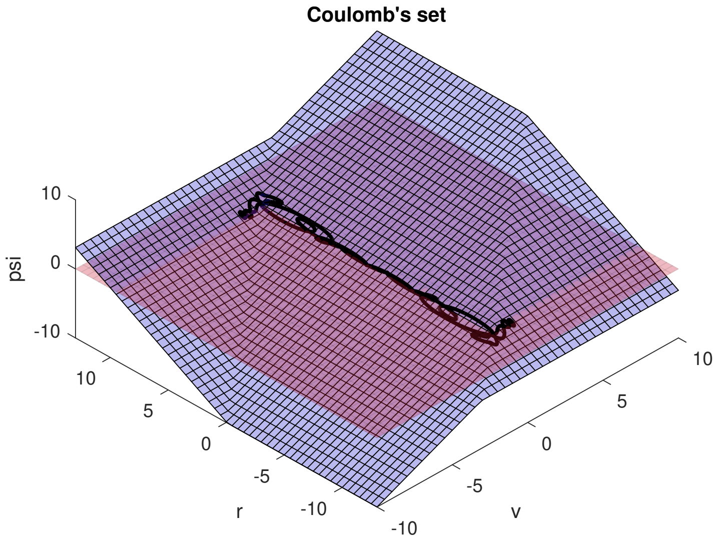


Figure 4: Itération 11

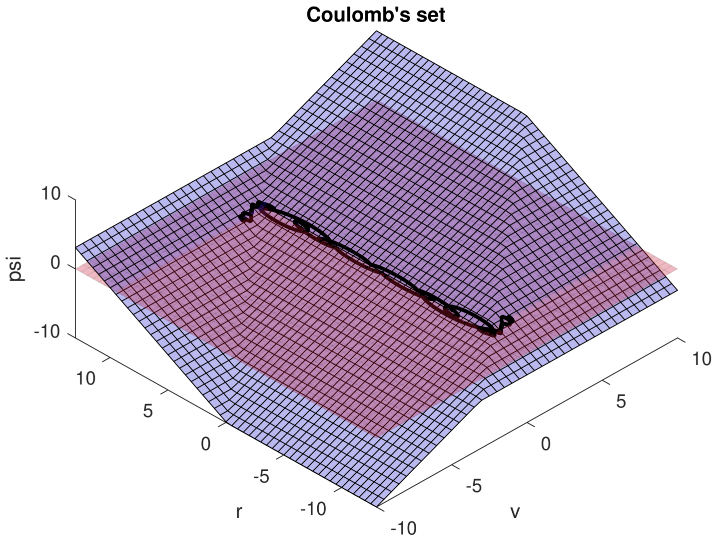


Figure 4: Itération 12

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

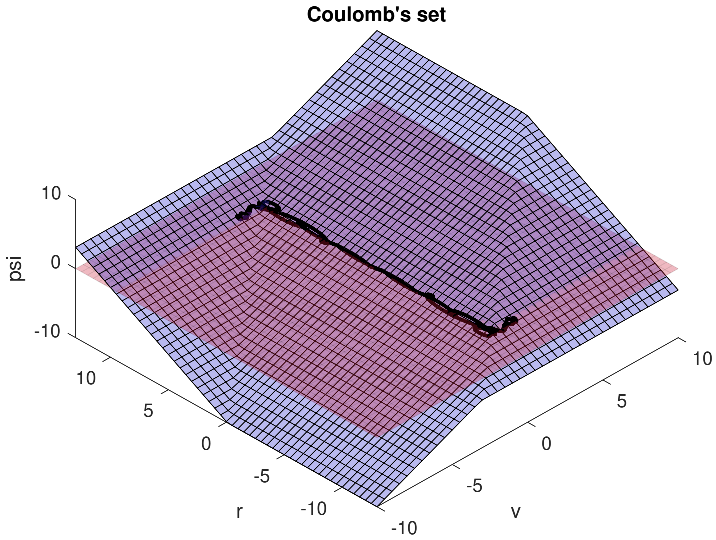


Figure 4: Itération 13

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

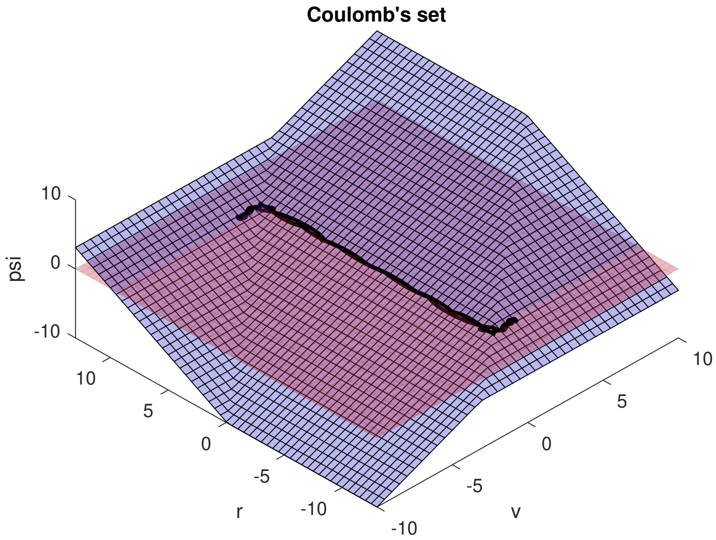


Figure 4: Itération 14

Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires

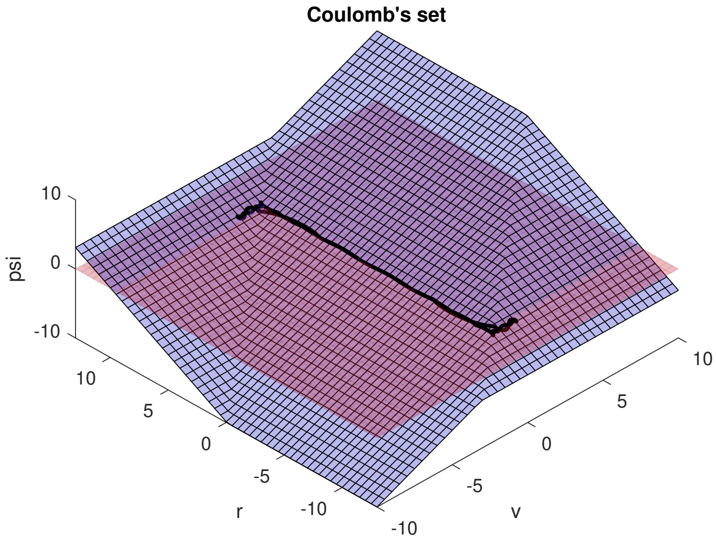
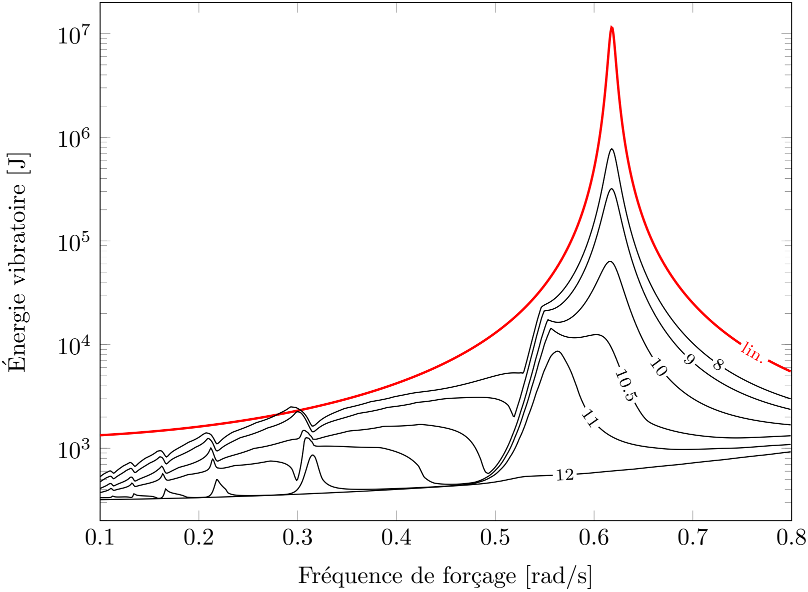
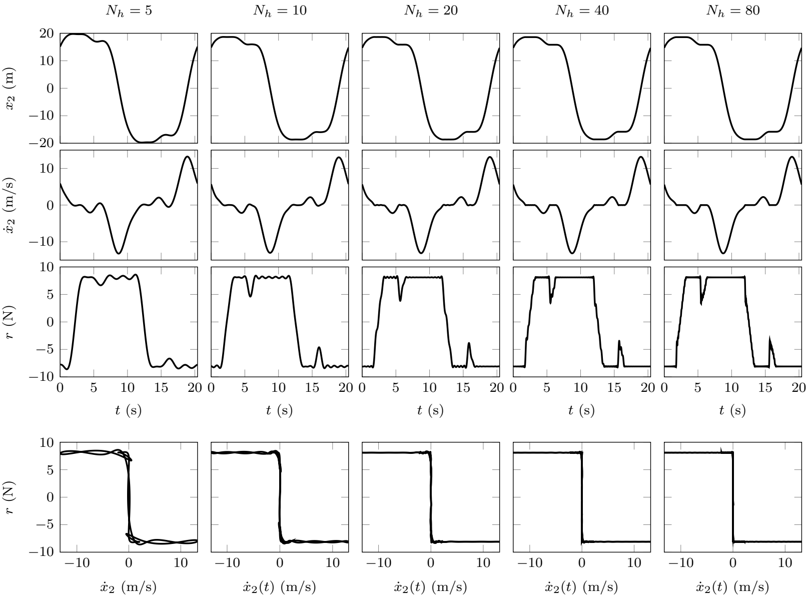


Figure 4: Itération 15

Réponse en fréquence



Analyse de convergence en fonction de N_h (ϕ_k = Fourier)



Comparaison avec solution temporelle

- Équilibrage harmonique avec $N_h = 80$ [rouge]
- Euler implicite ($h = 10^{-4}$) [noir pointillé]
- $\omega = 0.308$ et $N = 9$

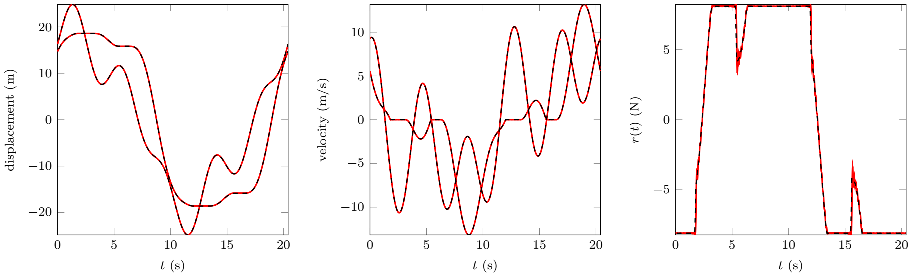
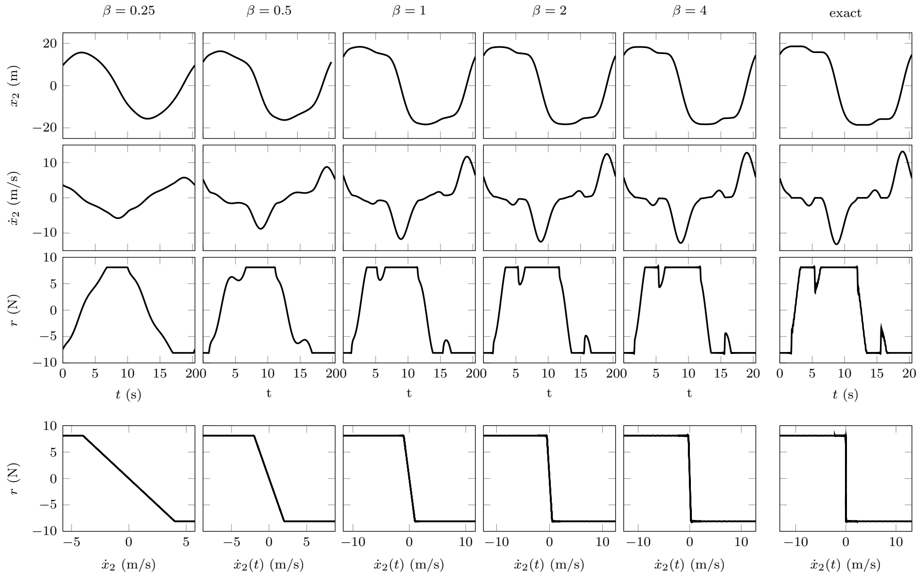
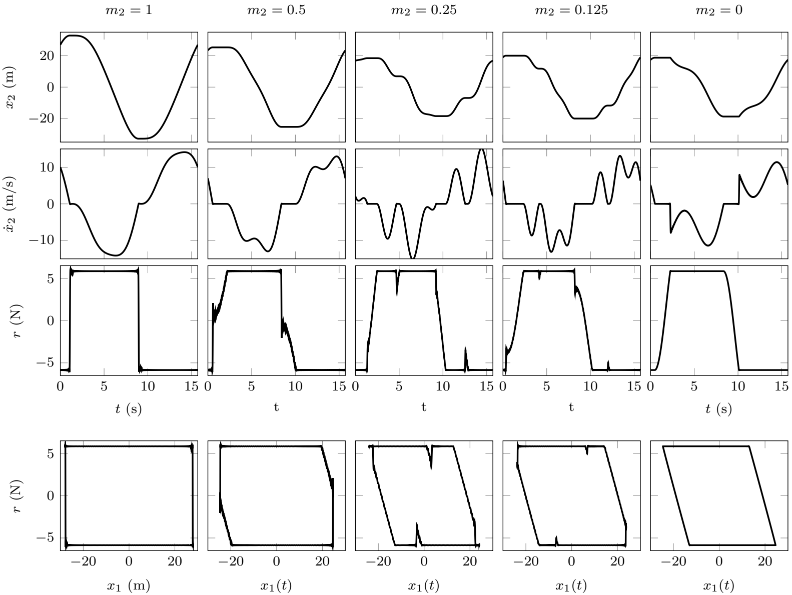


Figure 5: Solutions fréquentielle et temporelle (régime forcé) : [gauche] Déplacements x_1 et x_2; [milieu] Vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$; [droite] Force de frottement r

Régularisation par morceau (paramètre β)



Cas $m \to 0$ (amortisseur sans masse)



Extension au frottement 2D

- Interface de frottement surfacique: trajectoire en courbe fermée
- Méthodes de résolution existantes
  - Difficulté à déterminer la direction de frottement : angle de glissement
  - A chaque itération du solveur non-linéaire dans le domaine fréquentiel, passage dans le domaine temporel afin d'estimer la trajectoire 2D compatible avec les forces de frottement par intégration temporelle
  - Hypothèse simplificatrice de trajectoires circulaires ou elliptiques
  - Découplage des directions de glissement/frottement

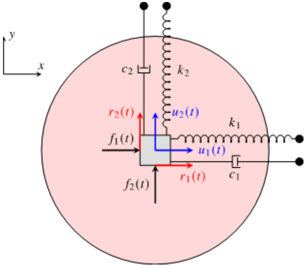


Figure 6: Oscillateur dans le plan

- AFT/HFT[14][15] : hypothèse systématique de frotteur sans masse (sorte de régularisation)
- DLFT[16] : méthode la plus générale

[14] Cameron and Griffin. "An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems". *Journal of Applied Mechanics* (1989).

[15] Poudou and Pierre. "Hybrid Frequency-Time Domain Methods for the Analysis of Complex Structural Systems with Dry Friction Damping". *44th Structural Dynamics and Materials Conference*. 2003.

[16] Nacivet, Pierre, Thouverez, and Jézéquel. "A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems". *Journal of Sound and Vibration* (2003).

Formulation par égalité 2D

- Dynamique

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 &= r_1 + f_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 &= r_2 + f_2(t) \end{aligned} \tag{28}$$

- Formulation de Coulomb en 2D

$$\begin{cases} \|\dot{\mathbf{x}}\| = 0 \;\Rightarrow\; \|\mathbf{r}\| \leq \mu N & \text{[collement]} \\ \|\dot{\mathbf{x}}\| \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{r} = -\mu N\dot{\mathbf{x}}/\|\dot{\mathbf{x}}\| & \text{[glissement]} \end{cases} \tag{29}$$

- Égalité équivalente [$\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$][17]

$$\mathbf{\Psi}_r(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{r}) = \mathbf{r}\max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \tag{30}$$

  - équivalente à l'expression avec projecteur

$$\mathbf{r} - \mathbf{proj}_{D(\mu N)}(\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{proj}_{D(\mu N)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \|\mathbf{x}\| \leq \mu N \\ \mu N\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| & \|\mathbf{x}\| > \mu N \end{cases} \tag{31}$$

  - deux équations (non régulières) avec symétrie dans les directions 1 et 2
  - Régularisation univoque classique (et raide !)

$$\mathbf{r}\|\dot{\mathbf{x}}\| + \mu N\tanh(\alpha\|\dot{\mathbf{x}}\|)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \tag{32}$$

[17] Hüeber, Stadler, and Wohlmuth. "A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with coulomb friction". *SIAM Journal on Scientific Computing* (2008).

Surface et niveau-0 et régularisation 2D (version 1D)

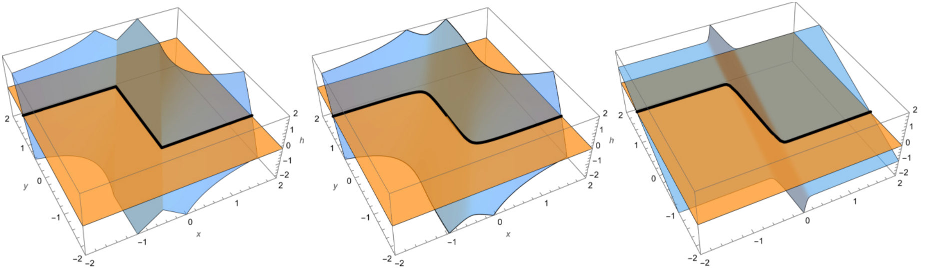


Figure 7: Fonction $\Psi_{\mathrm{r}}(\dot{x}_2, r)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Coulomb $\equiv$ intersection

De gauche à droite

- Non-régulier par projection [implicite, multivoque, non raide]
- Non-régulier régularisé : $|x| \approx \sqrt{x^2 + \epsilon}$, ϵ petit [implicite, multivoque, non raide]
- Tangente hyperbolique : $\mathbf{r}||\dot{\mathbf{x}}||+\mu N \tanh(\alpha||\dot{\mathbf{x}}||)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ [explicite, univoque, raide]

Configuration isotrope : $m = k = 1$, $\mu N = 8$, $N_\phi = 500$

- Quatre inconnues (r_1, r_2, x_1, x_2) pour quatre équations type DAE $\rightarrow$ HBM

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1 x_1 = r_1 + f_1(t)\\
&m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2 x_2 = r_2 + f_2(t)\\
&r_1 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_1 - \rho\dot{x}_1) = 0\\
&r_2 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_2 - \rho\dot{x}_2) = 0
\end{aligned}
\tag{33}
$$

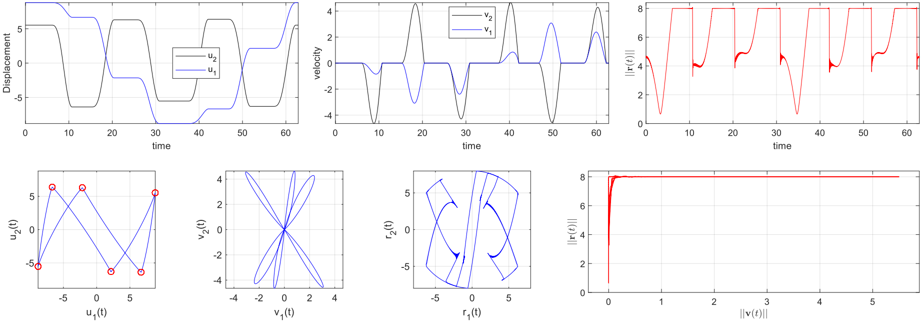


Figure 8: Trajectoire avec 4 phases de collement/glissement : $f_1(t) = 10\cos\omega t$, $f_2(t) = 10\cos 3\omega t$, $\omega = 0.1$

Configuration isotrope : $m = k = 1$, $\mu N = 8$, $N_\phi = 500$

- Quatre inconnues (r_1, r_2, x_1, x_2) pour quatre équations type DAE → HBM

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = r_1 + f_1(t)\\
&m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = r_2 + f_2(t)\\
&r_1 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_1 - \rho\dot{x}_1) = 0\\
&r_2 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_2 - \rho\dot{x}_2) = 0
\end{aligned}
\tag{33}
$$

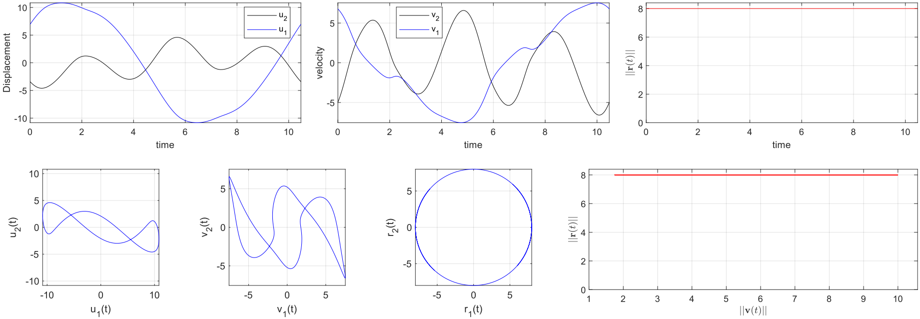
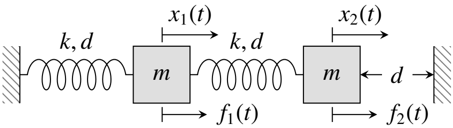


Figure 8: Trajectoire avec glissement pur : $f_1(t) = 10\cos\omega t$, $f_2(t) = 10\sin 3\omega t$, $\omega = 0.6$



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), \lambda(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \qquad \text{[masse 1]} \qquad (34)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - \lambda = 0 \qquad \text{[masse 2]} \qquad (35)$$

$$\lambda + \max(\rho(x_2 - d) - \lambda, 0) = 0, \qquad + \text{ loi impact pour } e \neq 1? \qquad \text{[contact]} \qquad (36)$$

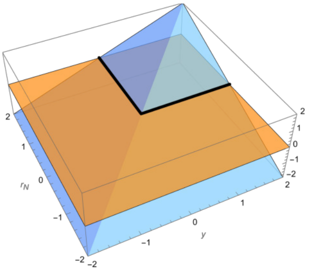
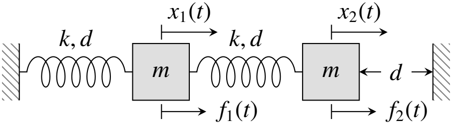


Figure 9: $\Psi_r(x_2, \lambda)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Signorini ≡ intersection

Contact unilatéral



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), \lambda(t))$

$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0$	[masse 1]	(34)
$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - \lambda = 0$	[masse 2]	(35)
$\min(\rho(x_2 - d), \lambda) = 0,$ + loi impact pour $e \neq 1$?	[contact]	(36)

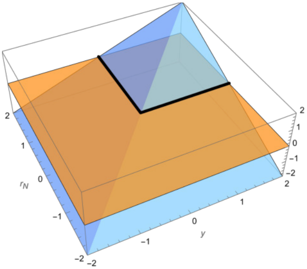
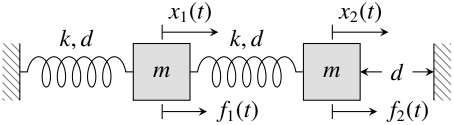


Figure 9: $\Psi_r(x_2, \lambda)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Signorini ≡ intersection

Contact unilatéral



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), \lambda(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \qquad \text{[masse 1]} \tag{34}$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - \lambda = 0 \qquad \text{[masse 2]} \tag{35}$$

$$-(x_2 - \lambda)^2 + |x_2|x_2 + |\lambda|\lambda = 0, \qquad + \text{ loi impact pour } e \neq 1? \qquad \text{[Fisher Burmeister]} \tag{36}$$

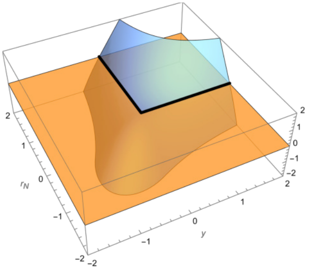
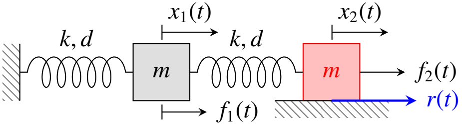


Figure 9: $\Psi_r(x_2, \lambda)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Signorini ≡ intersection

Effet Stribeck



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), r(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \qquad \text{[masse 1]} \qquad (37)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - r = 0 \qquad \text{[masse 2]} \qquad (38)$$

$$\dot{x}_2 + \min(r + (1 + \tfrac{1}{2}\exp(-2\dot{x}_2)) - \dot{x}_2, 0) + \max(r - (1 + \tfrac{1}{2}\exp(2\dot{x}_2)) - \dot{x}_2, 0) \qquad \text{[Stribeck]} \qquad (39)$$

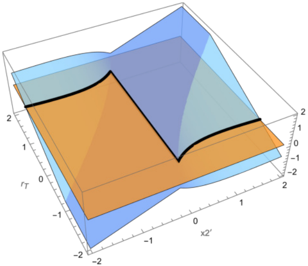


Figure 10: $\Psi_r(\dot{x}_2, r)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Coulomb-Stribeck ≡ intersection

Commentaires

- Méthode de résolution
  - formulation mixte (primale-duale) : pas d'intégration en temps des forces de contact
  - facilité de programmation, robustesse numérique
  - pas de régularisation/pénalisation, pas d'élimination de masse au contact[18]
  - paramètre $\rho = 1$ mais à adapter aux amplitudes de r, μN et $\dot{x}_2$
- Travail à venir
  - étude avec d'autres fonctions de forme $\{\phi_k(t)\}$: ondelettes ?
  - extension à des modèles de frottement plus avancés (Stribeck)
  - points de contact localisés multiples
  - application à des systèmes industriels (roues aubagées)
- Problèmes ouverts
  - nombre d'harmoniques différent pour déplacement, vitesse et force
  - couplage Signorini/Coulomb avec séparation $\rightarrow$ problème de la loi d'impact
  - adaptation au calcul de modes non linéaires de système avec frottement
  - force de frottement/contact distribuée : méthode de MORTAR ?
  - stabilité des solutions : valeurs propres du jacobien faible + Koopman[19] ?
- Article et code
  - Legrand & Pierre, "*A compact, equality-based weighted residual formulation for periodic solutions of systems undergoing frictional occurrences*", Journal of Structural Dynamics, 2024; [hal-04189699]
  - *Equal[iseR]*; [hal-04525598]

[18] Baek and Epureanu. "Contact model identification for friction ring dampers in blisks with reduced order modeling". *International Journal of Non-Linear Mechanics* (2020).

[19] Bayer and Leine. "Sorting-free Hill-based stability analysis of periodic solutions through Koopman analysis". *Nonlinear Dynamics* (2023).